This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.

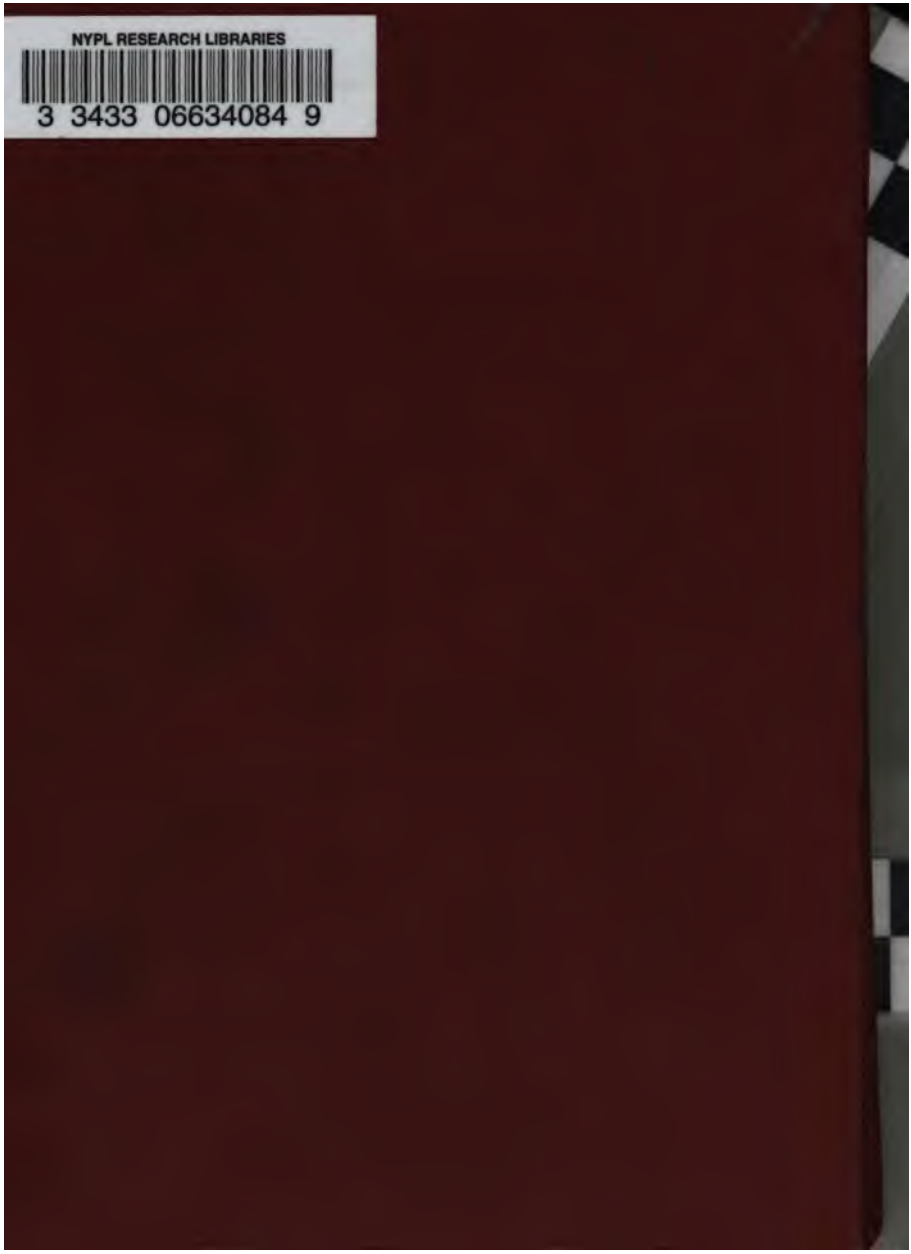
+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.

+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.

+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06634084 9

VDM
Busquet

MANUAL

DE

HIDRÁULICA

MANUAL

DE

HIDRÁULICA

Biblioteca de "INGENIERÍA,,

MANUAL

DE

HIDRÁULICA

POR

R. Raymond Busquet

Ingeniero de Artes é Industrias.
Profesor de la Escuela Industrial de Lyon.
Ingeniero de la Villa de Lyon.

MADRID
TIPOLITOGRAFÍA DE J. PALACIOS
Arenal, núm. 27

1908

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
737760
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1916 L

ES PROPIEDAD
Queda hecho el depósito
que marca la ley.

PRÓLOGO

Las crecientes necesidades de la industria moderna han producido un desarrollo paralelo de los aparatos productores de energía.

Los motores de vapor han llegado en estos últimos años á tal estado de perfeccionamiento, que parece difícil que pueda superarse en lo sucesivo. Los turbo-motores, turbinas Parsons, Curtis y de Laval han venido también á contribuir á la producción de la energía mecánica, y por último, los motores de explosión, á gas del alumbrado, gas pobre, esencia y aun alcohol, han permitido obtener en la transformación del calor en trabajo mecánico, rendimientos á que no se había llegado hasta ahora en el funcionamiento de los motores térmicos.

Pero todos estos aparatos productores de

energía, consumen enormes cantidades de carbón, cuyo precio, creciente con el consumo, hace perder todo el fruto de las economías realizadas por las sucesivas mejoras ó perfeccionamientos en el rendimiento de los motores térmicos.

Por esto, la industria ha acudido á otras fuentes de energía, y al mismo tiempo que el combustible que extrae de las minas, se ha puesto á explotar los saltos de agua, *la hulla blanca*, que se acumula en las vertientes de las montañas, y que en una ú otra forma viene luego á alimentar los receptores hidráulicos.

Es verdad que la utilización de las caídas de agua no es nueva, pero se aprovechaba tan defectuosamente la energía producida, que sus aplicaciones eran muy limitadas y no podía ser enviada para su distribución á los grandes centros de consumo.

En este terreno de la técnica, se ha producido una verdadera revolución desde que, por medio de las corrientes eléctricas, se ha podido transportar á las ciudades importantes, para ser utilizada en ellas la energía almacenada en las regiones montañosas.

A partir de este progreso, las instalaciones

hidráulicas se han extendido considerablemente, porque se trata de aprovechar reservas de potencia incalculables que pueden encontrar hoy día un empleo fácil por el adelanto maravilloso de la ciencia de las aplicaciones de la electricidad.

Sin hablar de formidables instalaciones que como las del Niágara utilizan una potencia que excede de cien mil caballos, todas las regiones montañosas ofrecen á nuestra actividad industrial recursos inagotables de energía hidráulica, y nuestro país casi en más cantidad é importancia que ningún otro. Queda aún para nuestros ingenieros un vasto campo que explotar, y se puede decir que si el siglo último ha sido el siglo del vapor, el actual podrá llamarse *la edad de la hulla blanca*.

Los problemas de la utilización de la fuerza hidráulica están, por lo tanto, cada vez más á la orden del día: se puede decir sin exageración que el MANUAL DE HIDRÁULICA que ahora publicamos es de verdadera actualidad y satisface una necesidad industrial.

Este libro no es ni una obra puramente descriptiva, ni tampoco un tratado didáctico solamente abordable por los ingenieros

iniciados en el estudio de las matemáticas superiores.

Es un resumen de hidráulica aplicada en el que se exponen las teorias técnicas completas y todos los cálculos necesarios para el establecimiento de motores y de saltos de agua, pero sin recurrir á operaciones que no sean elementales.

Nuestro objeto ha sido colocar la ciencia de la industria hidráulica al alcance de todos los técnicos, ingenieros, constructores, contratistas, etc., que tengan necesidad de intervenir en instalaciones de esta indole.

Creemos, pues, que este MANUAL puede prestarles un verdadero servicio y que contribuiremos con su publicación á facilitar el ejercicio de la profesión del ingeniero á nuestros lectores.

MANUAL DE HIDRÁULICA

CAPÍTULO PRIMERO

LEYES FUNDAMENTALES

1. Altura piezométrica. — Trabajo hidráulico. — El agua, como todos saben, es un líquido dotado de una gran fluidez, lo que quiere decir que las diversas moléculas que componen una masa determinada de este fluído, pueden desplazarse fácilmente unas con relación á otras: esta fluidez, sin embargo, no es perfecta, y los movimientos relativos de las moléculas ó de los filetes líquidos ocasionan resistencias de flotamiento ya sea con relación al líquido mismo, ó bien con relación á los cuerpos que le rodeen.

El agua puede considerarse en estado de reposo ó en estado de movimiento.

De aquí resultan dos partes principales de la tecnología: la *hidrostática* que trata del equilibrio de los líquidos en reposo, y la *hidrodinámica* que estudia los fenómenos relativos á los líquidos en movimiento.

La hidrostática está más relacionada con la física que con la industria: son bien conocidas sus leyes principales, especialmente las del equilibrio de los líquidos en los vasos comunicantes, y la de igual transmisión de las presiones, en todas direcciones, en el interior de una masa líquida en reposo: recordaremos solamente una definición que conviene tener presente: la de *nivel piezométrico*.

Si se considera un conducto lleno de agua en movimiento ó en reposo, este agua, en virtud de los principios recordados anteriormente, ejerce una presión sobre las paredes interiores del conducto en todas direcciones, y principalmente de abajo á arriba. Esta presión depende de la diferencia de alturas verticales entre el punto considerado y la parte superior del conducto.

Para que haya movimiento es, en efecto, necesario, admitir una diferencia de nivel que determine una diferencia de presión correspondiente, desde el origen del movimiento á su extremo, y por consecuencia de arriba á abajo.

En estas condiciones, sea porque la diferencia de nivel resulte de una sencilla inclinación del tubo sobre la horizontal, ó sea porque dependa de un depósito superior unido al conducto ó tubo, el agua se pondrá en movimiento en cuanto tenga un orificio de salida.

Si el tubo está cerrado por su base y se practica un orificio en un punto de la generatriz superior, se obtendrá un *chorro de agua* que subirá á una altura tanto mayor cuanto más considerable sea la diferencia de nivel de este punto al extremo más alto de la tubería: habrá, en este caso, salida al exterior y movimiento del agua en el interior del

tubo: los rozamientos de los filetes líquidos entre sí y contra las paredes interiores de la tubería, determinarán resistencias á la salida del líquido que tenderán á reducir la altura vertical del chorro.

Si en vez de abrir un orificio, se adosa un tubo perpendicularmente al primero y sobre el segundo se monta otro tercero suficientemente elevado para exceder con mucho al chorro líquido de que antes hemos hablado, de tal manera que no salga el líquido, el agua tomará en este tubo exactamente la misma altura que en el primero, es decir, que la tubería primera y este tercer tubo formará las dos ramas de un sistema de vasos comunicantes y el agua tendrá el mismo nivel en estas dos ramas (fig. 1.ª).

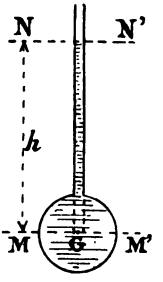


Fig. 1.ª
Piezómetro.

Admitamos, por ejemplo, que el tubo tenga un centímetro cuadrado de sección transversal interior; ésta será la sección de la columna de agua: supongamos prolongada esta columna hacia el interior del tubo hasta el centro G de éste. En este punto, la presión ejercida por la columna de agua, por la acción de su peso, en la base del tubo ficticio, será igual al volumen de dicha columna, multiplicado por su densidad, ó mejor dicho, por su peso específico que es igual á 1 gramo, pero que puede ser diferente para otro líquido y que designaremos en general por d. Siendo el volumen el producto de la sección por la altura h, y siendo la sección, por hipótesis, igual al centíme-

tro cuadrado, tomado como unidad de superficie, se tendrá:

$$\text{Peso de la columna} = d \times h \times 1 = d \times h.$$

Pero hay que hacer notar que este peso no constituye la totalidad de la presión soportada por la capa líquida que sirve de base á la columna de agua. Sobre esta columna se puede considerar otra de aire de la misma sección, cuyo peso se añade al de la columna de agua.

Por lo tanto, si designamos finalmente por p, como se hace generalmente, la presión que se ejerce en el centro del conducto por centímetro cuadrado de sección horizontal, y por P_a la presión atmosférica en lo alto de la columna, presión que es sensiblemente la misma que la que se ejerce en el punto considerado de la tubería, se podrá escribir que

$$\text{presión total } p = d \times h + P_a,$$

y restando P_a de los dos miembros, con lo cual la igualdad no se altera

$$d \times h = p - P_a.$$

El valor de h es lo que se llama *altura piezométrica* en el punto considerado del tubo, y el nivel NN' en el que se estaciona el extremo de la columna líquida se llama *nivel piezométrico* en el mismo punto del conducto.

Hemos supuesto hasta aquí que el tubo no estaba abierto más que por el tubo piezométrico y que,

por lo tanto, el líquido estaba en reposo á todo lo largo del tubo; si se hiciera un orificio que ocasionara una salida continua del líquido, y por lo tanto, un movimiento general del fluído en el tubo de conducción, bajaría el nivel en el tubo piezométrico aunque se mantuviera constante el nivel superior en el recipiente superior, y para un gasto determinado del tubo, el nivel de la columna se estacionaría á una altura determinada.

Si se supone ahora que se coloquen tubos piezométricos á todo lo largo de la tubería principal, repartidos uniformemente y equidistantes, se podrá observar que el nivel irá bajando progresivamente en estos tubos indicando así una pérdida de presión creciente de la parte más alta á la más baja, á causa de las resistencias de frotamiento en el trabajo del movimiento del agua.

Los distintos niveles observados en estos tubos constituirán los niveles piezométricos correspondientes á las presiones en las diversas partes de la tubería.

Estas pérdidas de presión ó *pérdidas de cargas* sucesivas son una consecuencia de las leyes del trabajo mecánico. Toda masa de agua elevada á cierta altura ó almacenada en un tubo inclinado que presente, por tanto, una diferencia de nivel entre sus dos extremos, es un depósito de trabajo ó de energía mecánica.

Cada kilogramo de agua puesto en movimiento que cae de una diferencia de nivel de 1 metro, da lugar á la producción de un trabajo determinado que se ha escogido como unidad de medida y que ha recibido el nombre de *kilográmetro*.

Ahora bien, antes de la caída, cada litro de agua

almacenado en el recipiente, posee una energía la tente de un kilográmetro por cada metro de eleva ción que tenga con relación al nivel del suelo ejercerá, por lo tanto, una cierta presión que co rresponderá al nivel piezométrico en este punto sobre el extremo inferior de la tubería; pero cuan do el agua se mueve se emplea una cierta canti dad de la energía almacenada en vencer el traba jo resistente debido á las fuerzas de frotamiento de tal manera, que la presión en la base inferior del tubo no es la que corresponde á la altura d desnivel real, sino á otra altura ficticia menor que la anterior que resulta de disminuir de ella la altura correspondiente á los esfuerzos de frota miento.

Resulta, pues, que la diferencia de las alturas piezométricas en los estados de reposo y movi miento proviene de este trabajo absorbido por rozamientos, y constituye una pérdida de car ga que reduce la presión en el punto conside rado.

Recordados estos principios fundamentales, en lo sucesivo nos ocuparemos más especialmente de las cuestiones de hidrodinámica.

2. Ley de Bernoulli. — Una ley que es de apli cación constante en hidráulica, cuando se trata de líquidos en movimiento, es la de Daniel Ber noulli.

Para comprender bien el objeto de esta ley, que es fundamental, consideremos un tubo líquido de una forma cualquiera, ya sea cilíndrico, recto ó curvo, ó cónico en el interior, del cual se despla za la masa fluida, cayendo según las leyes de la

gravedad desde el punto más alto *H* al más bajo *B* (fig. 2.ª).

Dado este sistema hay que estudiar cuáles son las velocidades del agua en las distintas secciones

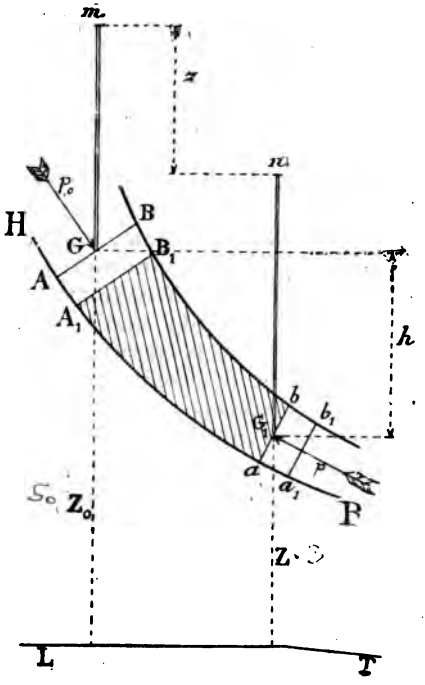


Fig. 2.ª—Demostración de la ley de Bernoulli.

A B, *a b*, y cuáles son los niveles piezométricos en estas mismas secciones á todo lo largo del tubo.

Este es el objeto de la ley de Bernoulli. Esta re

gla es la consecuencia de la ley general de la gravedad y de la caída de los cuerpos sólidos ó líquidos.

Se sabe que cuando se abandona á sí mismo un cuerpo pesado, cae con movimiento uniformemente acelerado, es decir, que en cada segundo su velocidad aumenta en 9,81 metros.

Por lo tanto, á los 10 segundos de iniciada la caída, por ejemplo, el móvil habrá adquirido una velocidad de 98,10 metros, ó por lo menos habría adquirido esa velocidad si la caída hubiera tenido lugar en el vacío y no se hubiera retrasado en su movimiento por la resistencia del aire.

Decir que un móvil está animado de una velocidad de 9,81 metros por segundo, equivale á expresar que es capaz de recorrer en la dirección de la fuerza á que esté sometido, que es en este caso la dirección vertical de la gravedad, un camino de 9,81 metros durante un segundo; pero si consideramos un cuerpo en reposo, su velocidad al principio es nula y pasa sucesivamente de 0 á 9,81 metros al cabo de un segundo por la acción de la gravedad. No recorrerá, por lo tanto, un espacio de 9,81 metros durante el primer segundo de acción, á partir del reposo, sino solamente un camino correspondiente á la velocidad media, es decir, $\frac{0+9,81}{2} = 4,905$ m.

El número 9,81 se designa generalmente por la letra g, que no es otra cosa que la aceleración de la velocidad debida á la pesantez.

Como la velocidad y el espacio recorrido, ó la altura de caída, aumentan necesariamente y en una progresión creciente con el tiempo, á cada

altura decaída corresponde una velocidad determinada, de tal modo, que si se designan simultáneamente por V y por h la velocidad y la altura de caída correspondientes, se encuentra, aplicando directamente las leyes de gravedad antes recordadas, que estas dos cantidades están unidas por la expresión

$$V = \sqrt{2g \times h}.$$

Supongamos un cuerpo que caiga de una altura de 26,95 metros, por ejemplo; en su posición natural de reposo, ó sea al fin de este recorrido, su velocidad se obtendrá por la fórmula anterior, y será:

$$V = \sqrt{2 \times 9,81 \times 26,95} = 23 \text{ metros.}$$

Si se elevan al cuadrado los dos miembros de esta igualdad, se tiene:

$$V^2 = 2g \times h,$$

y dividiendo los dos miembros por $2g$

$$\frac{V^2}{2g} = h.$$

Esta última fórmula permite, conociendo V, calcular la altura de cada correspondiente h; así, en el ejemplo anterior, suponiendo $V = 23$ metros, como $2g$ es igual á 19,62, resultará:

$$h = \frac{529}{19,62} = 26,95.$$

Como el tubo líquido considerado, tiene una forma cualquiera, presenta secciones desiguales en

sus diferentes puntos. La sección S_o en AB por ejemplo, es mayor que la sección S en ab. Es evidente, que en un momento dado pasa la misma cantidad de agua por la primera sección que por la segunda, y no lo es menos que la velocidad de salida será tanto mayor, para el mismo volumen de agua, cuanto menor sea la sección, ó de otro modo, las velocidades serán inversamente proporcionales al área de las secciones.

Designemos por q la cantidad de agua que pasa por cada sección en un segundo, por S_o y S las secciones AB y ab, y por V_o y V las velocidades correspondientes.

Se ve que el volumen gastado está constituído por un cilindro líquido que tiene por base la sección de salida que se considera y por altura el camino recorrido en un segundo ó sea la velocidad: se tendrá, por tanto, que

$$\text{Gasto} = q = S_o \times V_o = S \times V.$$

Designemos por p_o la presión exterior que se ejerce por unidad de superficie, centímetro cuadrado por ejemplo, sobre la sección superior AB del líquido, y por p la presión exterior sobre la sección ab.

Estas dos presiones no actúan en el mismo sentido, puesto que la primera está dirigida de izquierda á derecha, en el sentido del movimiento y la segunda de derecha á izquierda, en sentido inverso.

Por lo tanto, la masa de agua contenida en el prisma líquido AB, ab está sometida á las dos fuerzas $p_o \times S_o$ por una parte y $p \times S$ de otra, puesto que las presiones elementales p_o y p han de ser multiplicadas necesariamente por el número de

unidades de superficie correspondiente á cada sección.

Pero esta masa de agua está sometida además, en el sentido vertical, á la fuerza de la gravedad, es decir, á la acción de su propio peso.

El movimiento de la masa líquida considerada se debe, pues, á la acción resultante de estas diversas fuerzas concurrentes ó antagónicas.

Ahora bien, todo movimiento de una masa material, debido á fuerzas diversas, desarrolla un trabajo correspondiente al desplazamiento producido, y la mecánica enseña que este trabajo es igual al producto de las fuerzas por el camino recorrido en la dirección de cada una de ellas.

Veamos cuál es el trabajo de cada fuerza durante un segundo.

El camino recorrido por segundo en la dirección de la fuerza, no es otra cosa que la velocidad, y por lo tanto, el trabajo de la fuerza $p_o \times S_o$ será:

$$p_o \times S_o \times V_o = p_o \times q$$

porque

$$S_o \times V_o = q.$$

El trabajo de la fuerza $p \times S$ será, del mismo modo

$$p \times S \times V = p \times q.$$

Para calcular ahora el trabajo del peso de la masa AB, ab supongamos que la capa líquida AB, llegue á la posición $A_1 B_1$ al cabo de un segundo: el volumen gastado durante este tiempo estará exactamente representado por la capacidad vacía $AB\,A_1 B_1$ y este volumen será igual á

$$q = S_o \times V_o.$$

Es evidente que si en el mismo tiempo la capa inferior ab se ha trasladado á la posición a_1b_1, el volumen $ab\ a_1b_1$ será enteramente igual al $AB\ A_1B_1$ porque es necesario que el volumen de agua que ocupa esta capacidad que ahora está vacía, se aloje en otro volumen igual.

Se ve en resumen que sucede lo mismo que si quedando fija la masa intermedia $A_1B_1\ ab$, se hubiera trasladado el prisma de agua $AB\ A_1B_1$ á $ab\ a_1b_1$ efectuando en este movimiento una caída vertical h igual á la diferencia de niveles entre los centros de gravedad de las dos secciones consideradas.

El trabajo de la gravedad se reduce pues al de la masa $AB\ A_1B_1$ cuyo peso es igual á su volumen multiplicado por la densidad ó sea $q \times d$; el trabajo correspondiente á la caída h será por lo tanto:

$$q \times d \times h.$$

El trabajo total efectuado en la caída de la columna de agua considerada, será la resultante de los trabajos particulares de cada una de las fuerlas que actúan sobre ella: estos trabajos se suman ó se restan según que dependan de fuerzas dirigidas en el mismo sentido ó en sentido contrario.

Se tendrá por lo tanto:

$$\text{Trabajo total} = p_o \times q - p \times q + q \times d \times h.$$

Pero ésta no es aún la expresión de la ley de Bernoulli: para llegar á ella es necesario aplicar un principio de mecánica, consecuencia de la ley de la conservación del trabajo ó de la energía.

Para que esta ley se verifique, es necesario que los trabajos efectuados por las distintas fuerzas no

se pierdan, que se conserven y que vuelvan á encontrarse bajo cualquier otra forma.

La masa líquida almacena, en efecto, el trabajo desarrollado por las fuerzas en acción; está animada de una cierta velocidad que es proporcional al trabajo almacenado, y si se recibe esta masa en una rueda hidráulica, por ejemplo, transmitirá la energía que posee á la rueda perdiendo su velocidad: el trabajo está pues almacenado bajo la forma de velocidad.

En realidad, la potencia considerada en la masa móvil es proporcional á su masa y al cuadrado de la velocidad de que está animada.

En mecánica, la masa de un cuerpo tiene por expresión la relación de su peso á la aceleración, ó sea $\frac{p}{g}$.

Por último, el trabajo almacenado tiene por expresión:

$$\frac{1}{2} \times \frac{p}{g} \times V^2$$

en la cual el factor $\frac{1}{2}$ proviene de las consideraciones anteriores.

Por consecuencia, la potencia viva, ó el trabajo almacenado en una masa que pasa de la velocidad V_0 á la V será:

$$\frac{p}{2g} \times (V^2 - V_0^2)$$

y en este caso, como $p = q \times d$

$$\frac{q \times d}{2g} \times (V^2 - V_0^2).$$

No tenemos ahora más que aplicar la ley de la conservación de la energía escribiendo que la suma de los trabajos efectuados por las fuerzas parciales, ó mejor su resultante, está almacenada en la masa líquida en movimiento, y que, por lo tanto, esta resultante es igual á la variación de la fuerza viva correspondiente á la variación de la velocidad: se tendrá pues

$$p_o \times q - p \times q + q \times d \times h = \frac{q \times d}{2g} \times (V^2 - V_o^2)$$

y dividiendo por $p \times d$ los dos miembros

$$\frac{p_o}{d} - \frac{p}{d} + h = \frac{V^2}{2g} - \frac{V_o^2}{2g}.$$

Si hacemos ahora

$$\frac{p_o}{d} = h_o \qquad \text{y} \qquad \frac{p}{d} = h_1$$

lo que es lo mismo

$$p_o = d \times h_o \qquad \text{y} \qquad p = d \times h_1$$

se ve que las cantidades h_o y h no son otra cosa que las alturas piezométricas en G y G_1, de tal manera que si se colocasen dos tubos verticales en estos puntos, el agua subiría en G á una altura $GM = h_o$ y en G_1 á una altura $G_1 n = h_1$.

Tendremos, por lo tanto,

$$h_o + h - h_1 = \frac{V^2}{2g} - \frac{V_o^2}{2g}.$$

Pero la figura demuestra que $h + h_o - h_1 = z$, que es la diferencia de los niveles piezométricos, de donde, finalmente, se deduce que

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_o^2}{2g} = z$$

siendo ésta la expresión de la ley de Bernoulli.

En esta fórmula, $\frac{V^2}{2g}$ es una altura, en virtud de lo dicho anteriormente; también lo es $\frac{V_o^2}{2g}$ de modo que el primer miembro representa una diferencia de alturas ó sea la altura de caída que sería necesaria para que el agua, cayendo en el vacío, adquiriese el aumento de velocidad expresado por $V - V_o$.

La ley de Bernoulli puede pues expresarse diciendo que *la altura de caída ficticia correspondiente al crecimiento de velocidad de un líquido en movimiento, entre dos secciones consecutivas, es igual á la diferencia de los niveles piezométricos en las secciones consideradas.*

Se puede decir, por tanto, que la diferencia de los niveles piezométricos es la causa que produce el movimiento y acelera la velocidad de la corriente.

Todo lo que precede supone que los rozamientos de unas moléculas líquidas sobre otras y contra las paredes pueden despreciarse. Si no fuese así, el crecimiento de velocidad sería menor que z, porque una parte de la energía almacenada se utilizaría en vencer el trabajo del rozamiento, y la fracción disponible para aumentar la velocidad podría ser tan pequeña, que este crecimiento resultase des-

preciable, de tal manera, que el movimiento, en vez de ser acelerado, resultaría uniforme.

Se puede también observar que la altura z de la fórmula de Bernoulli, que determina el crecimiento de velocidad $V - V_o$ es superior á la altura de caída real que correspondería á la diferencia de altitud de las dos secciones consideradas AB y ab. En efecto, hemos visto que se tiene

$$z = (h_o + h) - h_1 = h + (h_o - h_1)$$

en la que h_o y h_1 son las alturas piezométricas correspondientes á las presiones p_o y p_1 sobre AB y ab. Si el agua cayese en el vacío, h_1 sería igual á 0; siempre z será mayor que h, ó por lo menos igual á h, si $h_o = h_1$.

Refiriéndonos siempre á la misma figura podremos dar otra forma á la expresión de la ley de Bernoulli, que presenta en la práctica algunas ventajas.

Sean Z y Z_o las alturas de los centros de gravedad de las secciones consideradas por encima del nivel $L\,T$, ó de cualquier otro plano horizontal de comparación: se ve en la figura que

$$h = Z_o - Z$$

y la fórmula podrá, por lo tanto, escribirse así:

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_o^2}{2g} = \frac{p_o}{d} - \frac{p}{d} + (Z_o - Z)$$

de donde se deduce

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{d} + Z = \frac{V_o^2}{2g} + \frac{p_o}{d} + Z_o.$$

Todos los términos de los dos miembros de la ecuación anterior, representan alturas: $\frac{V^2}{2g}$ es la altura correspondiente á la velocidad en la sección ab; $\frac{p}{d}$ es la altura piezométrica en la misma sección y Z la altura de la sección citada por encima del plano de comparación; y lo mismo para la otra sección.

Por lo tanto, la suma de las alturas definidas antes, correspondiente á una sección tal como AB, es igual á la suma de las alturas relativas á cualquier otra sección ab, de modo que la ley de Bernoulli puede también enunciarse así:

La suma de las alturas de velocidad, piezométrica y de altitud es la misma en todas las secciones.

3. Salida por un orificio en pared delgada.—El teorema de Bernoulli permite resolver un gran número de problemas prácticos interesantes.

El primero consiste en la determinación de la velocidad y del gasto de agua, cuando ésta sale por un orificio en una pared delgada.

Se entiende por esto en hidráulica, un orificio practicado en una pared de naturaleza cualquiera y cuyos bordes interiores son suficientemente delgados para que el espesor del bisel sea menor que la mitad de la dimensión menor del orificio.

Si el orificio es pequeño, sus bordes serán muy delgados, y el líquido saldrá sin rozamiento apreciable contra ellos como si no tuvieran ningún espesor (fig. 3.ª).

Cuando se practica un orificio de esta naturaleza en la pared de un recipiente, se ve que la vena lí-

quida que sale por él se contrae y presenta una sección mínima *ab* á una cierta distancia del orificio: es decir, que si se designa por *S* el área del orificio *AB*, la vena líquida tomará una forma cónica cuya base menor será sólo una fracción de la base del orificio *AB*.

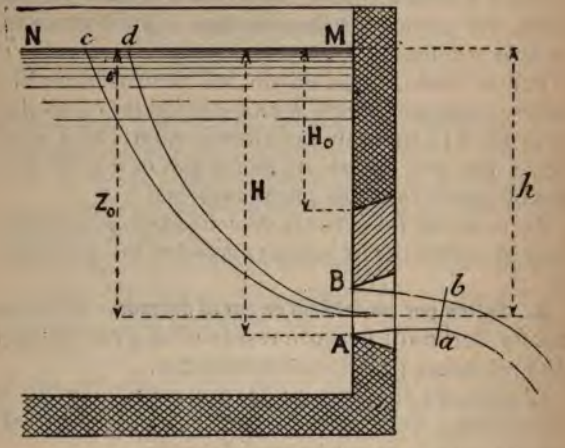


Fig. 3.ª—Orificio en pared delgada.

Entre todos los filetes líquidos que componen la vena ó chorro total, se puede considerar especialmente el tubo que fuera de la superficie *MN* á *cd* y aplicarle el teorema de Bernoulli.

Tomaremos para plano de comparación el plano horizontal que pasa por el centro de la sección contraída *ab*.

Sean $\frac{V_o^2}{2g}$, $\frac{p_o}{d}$ y Z_o las alturas correspondien-

tes á la sección cd y $\frac{V^2}{2g}$, $\frac{p}{d}$ y Z las referentes á la sección ab. Se podrá escribir:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{d} + Z = \frac{V_o^2}{2g} + \frac{p_o}{d} + Z_o.$$

Pero si se supone que la superficie del recipiente es grande con relación al orificio, la velocidad de las moléculas en cd será muy pequeña y puede despreciarse, ó sea hacer $V_o = o$.

Por otra parte p_o, presión que se ejerce en la superficie del recipiente, lo mismo que la que se ejerce en ab sobre la vena líquida, no es otra cosa que la presión atmosférica; se ve, en efecto, que los filetes elementales que componen la vena líquida describen la misma trayectoria parabólica que si estuvieran aisladas y fueran independientes: los filetes interiores están, pues, sometidos á las mismas condiciones que los exteriores, y la presión atmosférica que se ejerce sobre unos, actúa también sobre los otros en toda la sección ab.

Por último, $Z = o$ puesto que el plano de comparación se ha elegido con esta condición y Z_o es igual á h.

La fórmula anterior se convierte por lo tanto en

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{d} = \frac{p_o}{d} + Z_o$$

de donde,

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_o}{d} - \frac{p}{d} + h.$$

Y si, como hemos supuesto, el líquido sale al aire

libre, de manera que $p_o = p = p_a$, designando por p_a la presión atmosférica, quedará solamente:

$$\frac{V^2}{2g} = h.$$

La velocidad del líquido corresponde, pues, á la altura de carga de agua por encima del orificio, y sucede lo mismo que si el agua cayese libremente desde esa altura. La velocidad de salida al pasar por la sección contraída ab se obtendrá, pues, haciendo:

$$V^2 = \sqrt{2gh}$$

y si $h = 1{,}27$, por ejemplo:

$$V^2 = \sqrt{24{,}92} \quad \text{y} \quad V = 5 \text{ m. próximamente.}$$

El gasto ó volumen que sale por segundo se obtiene multiplicando la sección de salida por la velocidad en esta sección. Ahora bien: por el cálculo no es posible determinar la sección de la vena contraída en función de la del orificio, pero la experiencia demuestra que, cuando la pared es plana, el coeficiente de contracción es aproximadamente 0,62, y por lo tanto, que

$$s = 0{.}62\ S$$

siendo s el área de la sección contraída.

El volumen vertido por segundo ó gasto, será por lo tanto:

$$q = 0{,}62 \times S \times V$$

en la cual puede hallarse q numéricamente, si se conocen S y V.

Hay que tener presente que para mantener el gasto constante, es necesario mantener constante también el nivel del agua en el depósito, renovándola á medida que va saliendo por el orificio.

Si en lugar de un orificio de dimensiones muy pequeñas, como el que hemos considerado hasta ahora, se tratase de un orificio grande, rectangular, como sucede generalmente en la práctica, se podría suponer descompuesta la sección total en secciones elementales de altura muy pequeña cuyo conjunto formase la sección total.

Cada una de las secciones elementales daría un gasto que dependería de su altura por encima del nivel *MN*, y se puede admitir que el gasto total es proporcional á la sección total y á la media de las alturas extremas; se tendrá, pues, para gasto de una sección de cualquier dimensión, cuyos bordes horizontales estén situados á distancias H_o y H del nivel del agua en el depósito:

$$q = 0{,}62 \,.\, S \times \sqrt{2g \frac{H_o + H}{2}}$$

Lo que quiere decir que el gasto se obtiene, como en el caso precedente, multiplicando la sección contraída por la altura medida en el centro del orificio.

La fórmula no es rigurosa, pero es tanto más exacta cuanto menor es la altura del orificio.

El coeficiente de contracción tampoco es absolutamente constante: aumenta cuando la dimensión vertical del orificio disminuye y varía también con la carga. En realidad, oscila solamente entre 0,62 y 0,64, y se puede admitir prácticamente la cifra

0,62, porque, por consecuencia de los rozamientos despreciados, el gasto es un poco menor que el gasto teórico.

Según lo que precede, el gasto de un orificio rectangular en pared delgada se obtiene tomando para carga de agua la altura del líquido por encima del centro del orificio; pero es evidente que el razonamiento que se acaba de hacer para llegar á este resultado, basándose en la fórmula de Bernoulli, es independiente de la forma del orificio y será también aplicable al que sea cuadrado, rectangular ó circular; de modo que, en todos los casos, si designamos por h la altura vertical del centro de figura al nivel superior del líquido, el gasto vendrá dado por la fórmula general:

$$q = 0{,}62 \,.\, S \times \sqrt{2 \,.\, g \,.\, h}$$

4. Orificio sumergido, en pared delgada.—En el ejemplo anterior hemos supuesto que el líquido sale libremente á la atmósfera: es interesante estudiar también el caso en el cual el líquido pasa de un recipiente á otro por un orificio en pared delgada, practicado en el tabique divisorio de los dos depósitos y en la hipótesis en que el nivel del agua del recipiente receptor se eleva á una altura constante por encima del orificio.

Esto es lo que se llama salida del agua por un orificio sumergido, en pared delgada.

Imaginemos por lo tanto que á la derecha del recipiente de la figura 3.ª se une otro y que el agua se mantiene á una altura constante H_0, por ejemplo, en el primer recipiente por encima del nivel NM.

Tomemos también para plano de comparación el plano horizontal que pasa por el centro de figura del orificio, y sean, como antes, $\frac{V_o^2}{2g}$, $\frac{p_o}{d}$ y Z_o las alturas referentes á la sección superior cd.

Designaremos por $\frac{V^2}{2g}$ la altura de caída ficticia correspondiente á la velocidad de salida del líquido por el orificio en pared delgada y por Z la altura del centro de este orificio por encima del plano de comparación, la cual es nula por hipótesis.

La presión que se ejerce sobre la cara del orificio, del lado del recipiente de la derecha, se compone de la presión exterior p por unidad de superficie, debida generalmente á la atmósfera, mas el peso de la columna de agua que pasa sobre el orificio y cuya altura es igual á $Z_o - H_o$. El peso de esta columna ó su presión por centímetro cuadrado es igual á $(Z_o - H_o) \times d$.

Se deduce de aquí que la altura piezométrica en el nivel del orificio y del lado del recipiente de la derecha, será igual á

$$\frac{p}{d} + (Z_o - H_o) \times \frac{d}{d} = \frac{p}{d} + (Z_o - H_o).$$

La altura piezométrica á la derecha del orificio se compone, pues, en el caso actual, de la suma $\frac{p}{d} + (Z_o - H_o)$, de modo que la expresión de Bernoulli se convierte en

$$\frac{V^2}{2g} + \left(\frac{p}{d} + Z_o - H_o\right) + Z = \frac{V_o^2}{2g} + \frac{p_o}{d} + Z_o.$$

Pero $Z = o$ y la velocidad V_o puede también

considerarse como nula. Por otra parte, puede suprimirse Z_o en los dos miembros, y queda:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{d} - H_o = \frac{p_o}{d}$$

y pasando al segundo miembro todos los términos que siguen al primero:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_o}{d} - \frac{p}{d} + H_o$$

y por último, si se ejerce la presión atmosférica en los dos recipientes, se tiene $p = p_o = p_a$, y queda en definitiva:

$$\frac{V^2}{2g} = H_o \quad \text{ó} \quad V = \sqrt{2g.H_o}$$

es decir, que sucede lo mismo que si la altura de carga en el recipiente de la izquierda se redujera en la altura del nivel por encima del centro del orificio en el depósito de la derecha; en otros términos, la altura de carga eficaz es solamente la diferencia de nivel entre los dos recipientes.

Hay también que hacer notar que la velocidad de salida es independiente de la posición del orificio por debajo del nivel de la derecha, y esta velocidad será siempre la misma en tanto que el orificio quede sumergido, lo mismo si está situado hacia el fondo del recipiente, que si su borde superior llega casi al nivel del vaso receptor.

5. Orificio prolongado por un canal descubierto.— Otro caso que se presenta frecuentemente en la práctica, es aquél en que se ajusta al orificio un

canal descubierto para guiar el líquido hasta una cierta distancia de su punto de emergencia. Es preciso para esto, que el canal presente una inclinación determinada y tal que los filetes líquidos conserven la velocidad que tengan en la sección contraída.

Este caso puede reducirse al precedente si se considera el canal como un recipiente exterior lleno por el líquido.

La altura de carga vendrá dada, como antes, por la diferencia de los niveles en el recipiente principal y en el canal, es decir, por la distancia vertical entre *MN* y la superficie libre del líquido. Designando por *h* esta distancia, la expresión de la velocidad será siempre:

$$V = \sqrt{2gh}$$

6. **Diversos valores de los coeficientes de contracción.** — En cualquiera de los tres casos que hemos considerado, ó sea cuando el agua sale libremente á la atmósfera, cuando el orificio está sumergido, ó cuando se prolonga por un canal, se produce siempre un estrechamiento de la vena líquida á una cierta distancia del orificio.

Se puede reducir esta contracción en ciertos límites, colocando en el interior del recipiente y sobre los bordes del orificio paredes que dirijan los filetes líquidos según un haz casi paralelo: el coeficiente de contracción se aproxima á la unidad y puede ser 0,75 para pequeñas cargas de agua y alturas de orificios inferiores á 0,02 metros.

En el caso de la contracción completa, sin paredes directrices interiores, el coeficiente de contrac-

ción, es decir, la relación entre la sección contraída y la del orificio, es 0,62, por término medio, como antes hemos dicho.

Varios experimentadores han demostrado que, para una altura de orificio rectangular BA igual á 1 centímetro, la altura de la sección contraída ab es igual á 0,80 centímetros, y la distancia de esta última sección á la del orificio varía entre 0,39 y 0,50 centímetros.

Los tratados especiales contienen tablas experimentales que indican para todos los casos de altura de carga y de orificio, los coeficientes que deben aplicarse, pero en la mayor parte de los casos las cifras que se han indicado son suficientes en la práctica.

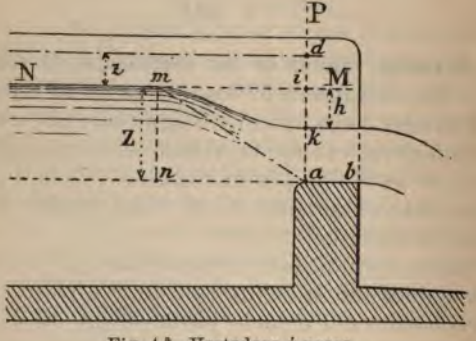


Fig. 4.ª—Vertedero ó presa.

7. Salida por vertedero. — El agua puede salir también, no por un orificio practicado en la parte inferior de la pared vertical, sino por encima de una presa ó vertedero (fig. 4.ª). En estas condicio-

nes, el líquido que sale no está en contacto con las paredes más que por tres lados, que son la coronación de la presa y las paredes laterales del depósito que alimenta la caída del agua.

El nivel del agua en el recipiente debe ser necesariamente más elevado que la coronación de la presa.

Cuando el agua sale en estas condiciones se ve que á una distancia pequeña de la presa, en el punto *m*, por ejemplo, la superficie del agua desciende y baja cada vez más hasta el plano del vertedero en el cual la lámina líquida alcanza su espesor mínimo por encima del plano *n a b*.

Este caso es análogo al que hemos examinado precedentemente relativo á la salida de un líquido por un orificio, prolongado por un canal descubierto. Se puede suponer, en efecto, una pared vertical colocada en la dirección *P k* á una distancia *k a* de la base del vertedero igual al espesor de la lámina líquida, considerando *a b* como la base del canal descubierto del ejemplo anterior.

Para que sean aplicables las mismas consideraciones, es necesario que el espesor de la presa sea suficiente para que los filetes líquidos tomen todos una dirección horizontal á su paso sobre la coronación, á partir de la sección *a k*. Se admite entonces que estos diversos filetes se mueven libremente, como si estuviesen aislados y solamente sometidos á la presión del medio exterior y á la presión hidrostática.

Si admitimos, por otra parte, que el nivel *N M* se mantiene constante por la continua llegada de agua al recipiente, y que la velocidad del líquido es despreciable en la sección *m n*, con relación á la

velocidad de salida en $k\,a$, obtendremos en seguida por comparación con los casos precedentes

$$V = \sqrt{2\,g \times h}$$

en la cual V es la velocidad de salida del agua sobre la coronación del vertedero, y h el desnivel, es decir, la diferencia de alturas entre el nivel general del agua en el depósito y la superficie de la lámina sobre la coronación de la presa.

Si se conociese, por lo tanto, el valor de h, se podría calcular fácilmente la velocidad V, y el gasto Q se deduciría, como en los demás casos, multiplicando esta velocidad por la sección de la lámina de salida.

Sea L la longitud de la presa entre las paredes verticales del vertedero: el espesor de la lámina por encima de la coronación es $(Z - h)$, de modo que la sección de salida es $L \times (Z - h)$ y por tanto el gasto será:

$$Q = L \times (Z - h) \times \sqrt{2\,g \times h}.$$

Falta conocer h y esta cifra puede determinarse por el cálculo ó experimentalmente.

La determinación por el cálculo se basa en que la altura h, de la que dependen la velocidad y el gasto, debe ser tal que la cantidad de agua que sale, sea máxima en las condiciones dadas.

Es evidente, en efecto, que el desnivel debe tomar naturalmente un valor determinado, y entre todos los valores que se pueden considerar hay dos que no pueden admitirse: el valor Z y el valor cero.

No se puede tener $h = Z$, porque este valor co-

rrespondería á la formación de un talud líquido *ma* incompatible con el equilibrio hidrostático: el espesor de la lámina líquida sería nulo entonces, es decir, que el agua no saldría, contradiciendo las leyes experimentales; tampoco puede admitirse que $h = cero$, porque correspondería á un desnivel nulo, ó á la supresión de la causa que produce la salida del agua.

El examen de la fórmula permite darse cuenta de estas circunstancias porque, partiendo de las hipótesis $h = Z$ ó $h = o$ se encuentra $Q = o$ en ambos casos, lo cual es imposible.

En resumen, el valor de h debe estar comprendido entre o y Z, ó dicho de otro modo, debe ser una fracción de Z y se puede escribir $h = K \times Z$ siendo K la fracción considerada.

Sustituyendo este valor en la fórmula, se convierte en

$$Q = L \times (Z - K.\,Z) = \sqrt{2\,g.\,K.\,Z}$$

que puede escribirse también

$$Q = L.\,Z \times \sqrt{2\,g.\,Z} \times (1 - K) \times \sqrt{K.}$$

Hay que hacer notar que en el segundo miembro de esta expresión, la cantidad Z es conocida y que los términos $(1 - K) \times \sqrt{K}$ son las únicas incógnitas. Del valor de estos últimos depende por lo tanto únicamente el máximo del gasto Q. Todo se reduce, pues, á determinar el valor de la fracción K que da al gasto Q el valor mayor.

Es fácil ver que el valor buscado es igual á $\frac{1}{3}$: en

efecto, si se hace $K=\frac{1}{3}$ en la expresión anterior se obtiene:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{\sqrt{3}}=0{,}385;$$

para $K=\frac{9}{30}$ valor ligeramente inferior á $\frac{10}{30}$ ó $\frac{1}{3}$ se encuentra $K=0{,}3834$ y para $K=\frac{11}{30}$, valor algo mayor que $\frac{1}{3}$ se obtiene 0,3835, siendo $K=\frac{1}{3}$, por lo tanto, el valor que hace la expresión máxima.

La fórmula del gasto será, pues, definitivamente

$$Q=0{,}385\ L\times Z\times\sqrt{2g\times Z}.$$

La experiencia confirma además la regla hallada por el cálculo.

Puede suceder que, en contradicción á la hipótesis admitida, la velocidad V_o en la sección mn no sea despreciable ante la velocidad V de salida. En este caso hay que volver á tomar la fórmula total de Bernoulli

$$\frac{V^2}{2g}+\frac{P_o}{d}+Z-h=\frac{V_o^2}{2g}+\frac{P_o}{d}+Z$$

expresión que se reduce á

$$\frac{V^2}{2g}=\frac{V_o^2}{2g}+h.$$

Por lo tanto de altura ficticia de caída $\frac{V^2}{2g}$, que

produce la velocidad de salida, se encuentra aumentada en la altura suplementaria $\frac{V_o^2}{2g} = z$ y se puede escribir

$$\frac{V^2}{2g} = h + z$$

de donde

$$V = \sqrt{2g \times (h+z)}:$$

luego todo sucede como si el desnivel fuera $h + z$ y el valor de Q resultará, haciendo esta hipótesis,

$$Q = L\,(Z - h) \times \sqrt{2g \times (h+z)}.$$

Se puede también suponer que el nivel del recipiente se eleve en la cantidad z, de modo que la altura del agua por encima de la coronación de la presa sea $(Z+z)$ el desnivel $kd = h + z$.

Siendo siempre la sección de salida ak, se podrá escribir

$$ak = (Z+z) - (h+z).$$

Esta expresión es equivalente al término $(Z-h)$ y reemplazarse en la fórmula, la cual se convierte en

$$Q = L \times [(Z+z) - (h+z)] \times \sqrt{2g \times (h+z)}.$$

Esta es, pues, la expresión del gasto para una altura de aguá $(Z+z)$ por encima de la coronación del vertedero y un desnivel $(h+z)$. Se debe, por consecuencia, tener por analogía con el caso precedente

$$h + z = \frac{1}{3}\,(Z+z).$$

Basta pues remplazar $(h+z)$ por $\frac{1}{3}(Z+z)$ en l fórmula: se puede por otra parte observar que l expresión precedente del gasto es aplicable al cas actual, teniendo en cuenta que la altura Z se con vierte en $(Z+z)$ y resultará:

$$Q = 0{,}385\ L \times (Z+z) \times \sqrt{2g \times (Z+z)}.$$

Supongamos como ejemplo numérico que

$$V_o = 1{,}98 \text{ m.} \quad Z = 0{,}50 \text{ m.} \quad \text{y} \quad L = 10 \text{ m.}$$

y tendremos

$$z = \frac{1{,}98^2}{2 \times 9{,}81} = 0{,}20$$

y por consecuencia

$$Z + z = 0{,}70 \text{ m.}$$

pudiéndose ya determinar el gasto que será

$$Q = 0{,}385 \times 10 \times 0{,}7 \times \sqrt{19{,}60 \times 0{,}70}$$

$$\text{ó} \quad Q = 2{,}695 \times \sqrt{13{,}72}$$

y efectuando operaciones

$$Q = 9{,}971 \text{ metros cúbicos.}$$

La velocidad en la sección de salida se determ nará por la fórmula

$$V = \sqrt{2g \times (h+z)} = \sqrt{2g \times \frac{Z+z}{3}} = 2{,}137 \text{ m}$$

Como, por otra parte, h tiene por valor

$$h = \frac{Z+z}{3} - z = \frac{Z-2z}{3}$$

el espesor de la sección de salida será

$$ak = Z - h = \frac{2}{3}(Z + z) = 0{,}467.$$

De donde se deduce la sección de salida

$$S = 0{,}467 \times 10 = 4{,}67 \text{ m.};$$

y, por último, el gasto:

$$Q = 4{,}67 \times 2{,}137 = 9{,}97 \text{ m}^3,$$

lo cual verifica el resultado obtenido aplicando la fórmula general.

8. Fórmula de Belanger.—Ensanchamiento brusco.—Pérdida de carga.—En todo lo que precede hemos supuesto que los diversos filetes del haz líquido que sale, eran independientes unos de otros, que cada uno seguía su camino como si estuviera solo, es decir, sin que los demás impidiesen ó estorbasen su movimiento. Esto equivale á despreciar los rozamientos que puedan producirse, los choques de las moléculas líquidas entre sí, causas todas que, en ciertos casos, modifican profundamente las condiciones del movimiento del líquido.

Vamos ahora á considerar las diversas circunstancias en las que los frotamientos toman una importancia bastante grande para que no puedan ser despreciados, sin exponerse á obtener resultados inexactos. Uno de estos casos, el más intere-

sante de estudiar, es el que se presenta cuando el líquido que circula en un tubo desemboca bruscamente en un canal de sección mucho más ancha, sin que la transición del tubo superior al canal inferior pueda hacerse progresivamente, en una pieza de acuerdo, en la que tenga lugar por grados insensibles, sino de repente, como indica la figura 5.ª

Al salir del conducto superior de la izquierda, la sección líquida pasa bruscamente de la sección *a b* al valor *A B*.

Como no están guiadas las moléculas líquidas al salir del orificio *a b*, se extienden en todos sentidos para llenar el espacio ensanchado que se les presenta, formando torbellinos y produciendo choques y remolinos que tienden á amortiguar y aun á anular su velocidad.

Resulta de esto que en la proximidad de la pared *A B*, el líquido está casi en el estado de reposo y sometido á las leyes de la presión hidrostática.

A una cierta distancia de la pared, los filetes líquidos han vuelto á tomar su orientación regular y caminan de nuevo paralelamente desde una cierta sección *C D*, en la cual el líquido seguirá las leyes de la hidrostática.

La salida tiene lugar, por lo tanto, de una manera normal en las secciones *a b* y *C D*, pero en el intervalo se produce una perturbación en virtud de la cual las moléculas de la masa líquida están animadas de distintas velocidades irregulares é imposibles de analizar y, sobre todo, de calcular.

No se pueden, pues, aplicar las consideraciones que han servido de base para establecer la fórmula de Bernoulli; habíamos considerado, en efecto,

en este caso, el trabajo debido al desplazamiento de la masa líquida entre las dos secciones superior

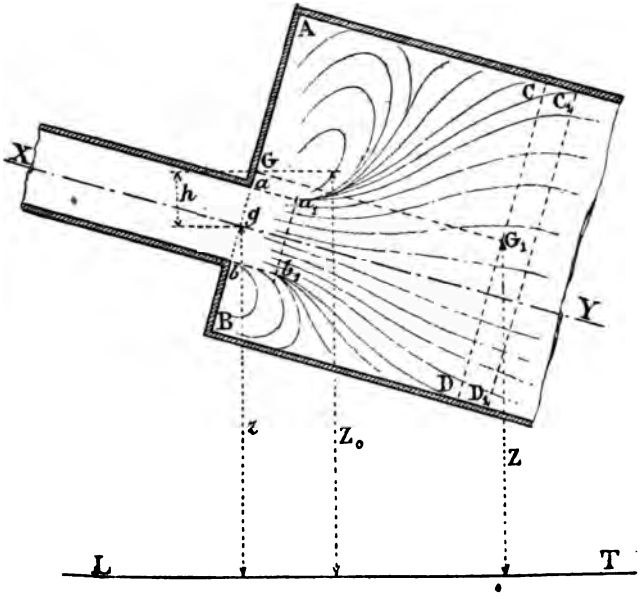


Fig. 5.ª — Ensanchamiento brusco de sección.

é inferior y este trabajo estaba representado por la expresión

$$\frac{q \times d}{g} \times \frac{V^2 - V_0^2}{2}$$

ó sea por el producto de la masa $\frac{q \times d}{g}$ por la mitad de la diferencia de los cuadrados de las velo-

cidades en las dos secciones consideradas, con lo cual se admitía implícitamente que la velocidad de las moléculas que forman los filetes regulares y paralelos, y el cuadrado de esta velocidad eran comunes á todas las moléculas y crecían de una manera continua y progresiva desde los valores iniciales V_0 y V_0^2 hasta V y V^2.

Pero en el caso actual ya no es lo mismo, por las perturbaciones de velocidad producidas en el movimiento de las moléculas entre las dos secciones consideradas.

Será, pues, necesario recurrir á otro principio que no exija, como el precedente, que la velocidad pase progresivamente de V_0 á V, y que no dependa más que de los valores de estas velocidades en los instantes determinados en que la corriente atraviesa la sección $a\,b$ ó la sección $C\,D$.

El principio de que se trata se deduce de considerar la cantidad de movimiento almacenada en la masa de un cuerpo material, cantidad que tiene por medida el producto de la masa del cuerpo, por la velocidad.

Toda fuerza que actúe sobre la masa le imprime á cada instante un impulso que acelera, es decir, que aumenta la velocidad y la cantidad de movimiento de este cuerpo. Este impulso es necesariamente proporcional á la intensidad de la fuerza y al tiempo que dura su acción, y tiene por valor la fuerza multiplicada por el tiempo ó la fuerza misma sencillamente, si el tiempo considerado es igual á un segundo, ó sea á la unidad de tiempo.

Sentado esto, el mencionado principio se enuncia diciendo que *el crecimiento de la cantidad de movimiento de una masa material durante un se-*

gundo es igual á la suma de los impulsos de las fuerzas que actúan en este mismo tiempo.

Las fuerzas en acción son las mismas que se han considerado precedentemente en el problema de Bernoulli, ó sean: la presión en la sección $A\,B$, la presión inversa en la sección $C\,D$ y el peso de la masa líquida comprendida entre las dos secciones.

Si llamamos p_0 la presión por centímetro cuadrado en la sección $A\,B$ de superficie S_0, la presión total sobre esta superficie será $p_0 \times S_0$ y sobre la sección $C\,D$ será, del mismo modo, $p \times S_0$.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que el peso de la masa líquida es una fuerza vertical, que no actúa, por lo tanto, en el sentido del movimiento dirigido según $X\,Y$. Lo que interesa conocer es el impulso en esta dirección, por efecto de la pesantez, y este impulso sólo puede ser debido á la componente de esta fuerza en la dirección $X\,Y$.

El peso de la masa total tiene por expresión el volumen multiplicado por la densidad, ó sea $d \times S_0 \times G\,G_1$. Para encontrar la componente de esta fuerza según la dirección $G\,G_1$ podemos observar que si $G\,G_1$ fuera vertical, el peso total sería su propia componente según $G\,G_1$, es decir, que la componente se obtiene multiplicando $d \times S_0$ por la proyección $G\,G_1$, sobre sí misma en este caso particular ó, más generalmente, sobre la vertical que pasa por G.

Por lo tanto, si $G\,G_1$ en lugar de ser vertical está inclinada en la posición que la figura indica, su proyección sobre la vertical será igual á $(Z_0 - Z)$, es decir, á la diferencia de altura de los centros de gravedad G y G_1 de las dos secciones $A\,B$ y $C\,D$.

En definitiva la componente buscada será

$$d \times S_0 \times (Z_0 - Z).$$

Sean ahora V_0 y V las velocidades en las secciones $a\,b$ y $C\,D$ y q el volumen de agua que pasa por segundo y que estaría, por tanto, representado por $a\,b\,a_1\,b_1$ en la parte superior y por $C\,D\,C_1\,D_1$ en la inferior.

Sucede lo mismo que si durante el segundo considerado, la masa intermedia quedase inmóvil y el prisma de agua $a\,b\,a_1\,b_1$ se trasladase á $C\,D\,C_1\,D_1$, pasando de la velocidad V_0 á la velocidad V.

El crecimiento de movimiento de la masa $\frac{q \times d}{g}$ durante este tiempo, será:

$$\frac{q \times d}{g} \times (V - V_0) = \frac{V \times S_0 \times d}{g} \times (V - V_0);$$

y puesto que $q = S_0 \times V$, según el principio antes enunciado, se tendrá:

$$\frac{V \times S_0 \times d}{g} \times (V - V_0) = p_0 \times S_0 - p \times S_0 + d \times S_0 \times (Z_0 - Z).$$

Dividiendo los dos miembros por $S_0 \times d$, resulta:

$$\frac{V \times (V - V_0)}{g} = \frac{p_0}{d} - \frac{p}{d} + (Z_0 - Z).$$

Pero $\frac{p_0}{d}$ es la altura piezométrica en G; si designamos por $\frac{p_1}{d}$ la que hay en g, es evidente que se tendrá:

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_1}{d} - h;$$

y como, por otra parte, $Z_0 = z + h$ se ve que se puede esbribir, por último,

$$\frac{V \times (V - V_0)}{g} = \frac{p_1}{d} - \frac{p}{d} + z - Z =$$
$$\frac{p_1}{d} - \frac{p}{d} + H,$$

haciendo $(z - Z) = H$.

Para poder comparar esta expresión á la de Bernoulli, hay que ponerla bajo otra forma; se puede, sin alterar la igualdad, agregar á los dos miembros los términos $\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g}$, y se tendrá, transponiendo uno de los términos,

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = \frac{p_1}{d} - \frac{p}{d} + H - \frac{V \times (V - V_0)}{g} + \frac{V^2 - V_0^2}{2g}.$$

Ahora bien, es fácil de ver que

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} - \frac{V \times (V - V_0)}{g} = - \frac{(V_0 - V)^2}{2g}$$

supongamos, en efecto, valores arbitrarios cualquiera, tales como $g = 1$, $V = 2$ y $V_0 = 1$, y reemplacemos las letras por estas cantidades en las fórmulas y se encontrará para el primer miembro

$$\frac{4 - 1}{2} - \frac{2 \times 1}{1} = - \frac{1}{2}$$

y para el seguro

$$- \frac{(1 - 2)^2}{2} = - \frac{1}{2}$$

lo que verifica la igualdad establecida; se podrá, por lo tanto, escribir:

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = \frac{p_1}{d} - \frac{p}{d} + H - \frac{(V_0 - V)^2}{2g}$$

ó también

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = h_1 - h + \left(H - \frac{(V_0 - V)^2}{2g}\right).$$

Esta fórmula es la de Belanger, que difiere de la de Bernoulli en el término sustractivo $-\frac{(V_0 - V)^2}{2g}$. Este término representa la altura ficticia de caída á la cual se debería la velocidad $(V_0 - V)$, ó mejor la pérdida de velocidad entre las secciones $a\,b$ y $C\,D$.

Esta altura ficticia se resta de H, de modo que sucede lo mismo que si el centro de gravedad G_1 se elevase en una cantidad igual á $\frac{(V_0 - V)^2}{2g}$ y que no existiera el ensanchamiento brusco.

De aquí resulta que la diferencia de las alturas $\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g}$ que constituye la carga á la cual se debe la producción de la corriente, se reduce en esa misma cantidad. Por esto, el término $\frac{(V_0 - V)^2}{2g}$ se llama pérdida de carga debida al ensanchamiento brusco de la sección.

CAPÍTULO II

MOVIMIENTO DE LOS LÍQUIDOS EN LOS TUBOS DE CONDUCCIÓN

9. Pérdida de carga por rozamiento. — Fórmulas de Prony y de Darcy. — Excepto en el caso particular que se acaba de estudiar, en el que, á consecuencia de un ensanchamiento brusco del tubo, los filetes líquidos se desvían de su dirección general y están sometidos á rozamientos que perturban momentaneamente la continuidad del movimiento, modificando la velocidad, hemos despreciado en los demás casos las causas de variación ocasionadas por las fuerzas de rozamiento.

Cuando se trata de líquidos en movimiento es necesario tenerlas en cuenta, especialmente en las distribuciones de agua en tubos de conducción.

Se sabe que siempre que un cuerpo sólido ó líquido se mueve con relación á otro cuerpo fijo, apoyándose sobre él, se desarrolla una fuerza antagonista de frotamiento que se opone al movimiento del cuerpo móvil, y por consiguiente, dirigida en sentido contrario al del movimiento, y ejercida en el plano mismo de contacto ó de deslizamiento.

Lo mismo sucede con el agua en movimiento al contacto de las paredes interiores de una tubería; la superficie exterior del cilindro líquido roza contra las paredes del tubo y disminuye la velocidad del movimiento; la capa líquida cilíndrica inme-

diatamente próxima, roza á su vez contra la envolvente líquida exterior, y su movimiento es menos retardado que el de esta envolvente exterior que roza contra paredes sólidas.

Se puede suponer, por lo tanto, que las distintas envolventes concéntricas que forman el cilindro total líquido, resbalan así unas sobre otras á semejanza de los tubos telescópicos, de tal manera, que la más exterior es la que camina más despacio, y la que forma el eje del tubo es la que tiene mayor velocidad.

No es posible calcular la suma de los retrasos que resultan de estos frotamientos relativos entre la capa exterior y la pared de la tubería, por una parte, y las diversas envolventes líquidas, dos á dos, por otra, y sólo se pueden establecer fórmulas

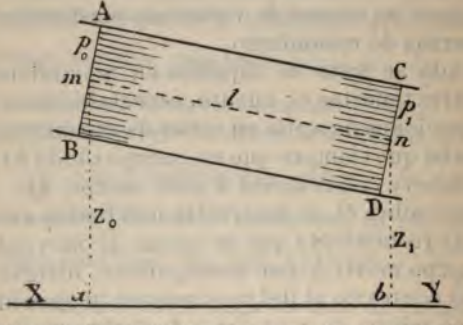


Fig. 6.ª—Movimiento permanente en una tubería.

que estén basadas en la experiencia y en las c
sideraciones que vamos á indicar.

Consideremos un trozo de tubería (fig. 6.ª) de
gitud l y apliquemos la fórmula de Bernoul

prisma de agua comprendido entre las dos secciones $A\,B$ y $C\,D$ de este trozo.

Para esto sería necesario conocer la velocidad de cada uno de los filetes líquidos que pasan por las secciones $A\,B$ y $C\,D$, los cuales experimentan retardamientos de velocidad mayores á medida que se les considera más alejados desde el centro hacia la periferia, estando, por lo tanto, animados todos ellos de velocidades distintas. Para vencer esta dificultad que se nos presenta, hay que recurrir á considerar la velocidad media.

En efecto, lo que interesa conocer es el gasto ó volumen del líquido que pasa por el tubo en un segundo, y esta cifra no varía si en vez de tener todos los filetes velocidades distintas, tuvieran una misma y tal que pudiera escribirse:

$$\text{Gasto } Q = \text{sección } S \times \text{velocidad media } v.$$

Esta velocidad media v está determinada, por lo tanto, por la condición de que ha de corresponder al gasto real Q, para una sección dada S.

De la fórmula anterior

$$Q = S \times v$$

se deduce

$$v = \frac{Q}{S}.$$

Si se determina la velocidad media v_o en $A\,B$ y la velocidad media v en $C\,D$, se podrá aplicar la ley de Bernoulli y escribir

$$\frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o}{d} + Z_o = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{d} + Z_1$$

pero la experiencia demuestra que esta fórmula, tal cual es, no se verifica en el caso que estamos estudiando, porque en ella no se tienen en cuenta frotamientos importantes que tienen lugar en el tubo.

La fórmula de Bernoulli indica que, prescindiendo de los frotamientos, para que se tenga en la sección $C\,D$ una velocidad v, es necesario tener en $A\,B$ una velocidad v_o, una presión p_o y una altura de nivel Z_o que determinen una suma de alturas generatrices $\frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o}{d} + Z$ igual á la suma de alturas correspondiente á la velocidad v, en la sección $C\,D$.

Pero la altura generatriz total en $A\,B$, dada por la fórmula de Bernoulli, no basta cuando hay que tener en cuenta los rozamientos que se ejercen á todo lo largo del tubo, sino que ha de ser aumenda en otra suplementaria, que equilibre á la resultante de estas fuerzas antagónicas de rozamiento.

Designemos por F esta fuerza resultante, por metro de longitud del tubo: es fácil calcular la altura de columna líquida equivalente á esta fuerza que vamos á llamar k, puesto que F debe ser equivalente al peso de la columna de agua, peso expresado por el producto de la sección S por la altura k y por la densidad d; se podrá escribir, por lo tanto,

$$F = S \times k \times d$$

de donde se deduce

$$k = \frac{F}{S \times d}.$$

La fuerza de rozamiento total, para toda la longitud del tubo será $F \times l$ y la altura correspondiente será también l veces k ó sea $l \times k = K$, siendo esta la altura complementaria que hay que introducir en la fórmula de Bernoulli, para obtener el equilibrio deseado entre las fuerzas que producen el movimiento y las de frotamiento que tienden á retardarlo.

La fórmula modificada, en vista de esto, será:

$$\frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o}{d} + Z_o = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{d} + Z_1 + K.$$

La altura suplementaria K, en la cual debe aumentarse la altura generatriz en la sección superior AB, constituye lo que se llama pérdida de carga debida á los rozamientos: porque si se designa por H_o la carga total AB y por H_1 la de CD, la expresión anterior podrá escribirse:

$$H_o = H_1 + K$$

ó lo que es lo mismo

$$H_1 = H_o - K.$$

Falta determinar el valor de esta pérdida de carga K, y para ello hay que emplear la fórmula establecida por Prony:

$$K \times l = l \times C \times (m.v + n.v^2).$$

En esta fórmula, l es la longitud de la tubería considerada, C es el perímetro de la sección interior y v es la velocidad media de la corriente, que será la misma en todo el recorrido si la sección de la tubería es uniforme.

Como por otra parte se tiene que

$$K = \frac{F \times l}{S \times d}$$

se podrá escribir

$$K = \frac{F \times l}{S \times d} = \frac{l \times C}{S \times d} (m v + n v^2)$$

expresión que puede simplificarse y resulta

$$K = \frac{l \times C}{S} \times \left(\frac{m}{d} v + \frac{n}{d} v^2 \right)$$

porque en lugar de dividir la suma, se puede dividir cada uno de los sumandos por d: haciendo ahora $\frac{m}{d} = a$ y $\frac{n}{d} = b$, queda

$$K = \frac{l \times C}{S} \times (a v + b v^2).$$

Los factores ó coeficientes a y b han sido determinados por Prony y tienen por valor:

$$a = 0{,}000018 \quad \text{y} \quad b = 0{,}000348.$$

Como ha hecho observar Darcy, los coeficientes indicados por Prony no tienen en cuenta el estado de las paredes interiores de los tubos: para conductos recubiertos de depósitos, como sucede generalmente en la práctica, propone coeficientes mayores, que son:

$$a_1 = 0{,}000032 \quad \text{y} \quad b_1 = 0{,}000443.$$

Si la velocidad del agua v fuese muy pequeña, se podría prescindir en esta fórmula del término

que contiene v^2, porque el cuadrado de una cantidad muy pequeña puede despreciarse; pero en la práctica conviene establecer las tuberías de manera que la velocidad no baje de 0,150 m. por segundo, y para este valor, los términos av y bv^2 están aproximadamente en la relación

$$\frac{av}{bv^2} = \frac{1}{3} \quad \text{ó} \quad av = \frac{1}{3} bv^2.$$

El término bv^2 es, pues, mayor que el av, pero cuando v tiene un valor superior á 1 m. se puede, por el contrario, despreciar av ante bv^2, porque para $v = 1$ se tiene que

$$\frac{av}{bv^2} = \frac{1}{20};$$

av no es entonces más que la vigésima parte de bv^2 y puede simplificarse la fórmula, en este caso, quedando:

$$K = \frac{l \times C}{S} bv^2.$$

Para tener en cuenta el término suprimido, hay que hacer, según Dupuit, $b = 0{,}0003855$.

La pérdida de carga por metro será solamente:

$$k = \frac{C}{S} bv^2$$

y en general

$$k = \frac{C}{S} \times (av + bv^2).$$

10. Cambios bruscos y sucesivos de sección. — Las pérdidas de carga debidas á cambios bruscos de

sección en las tuberías se calculan con arreglo á las teorías expuestas precedentemente.

La figura 7.ª resume los diferentes casos que en la práctica pueden presentarse.

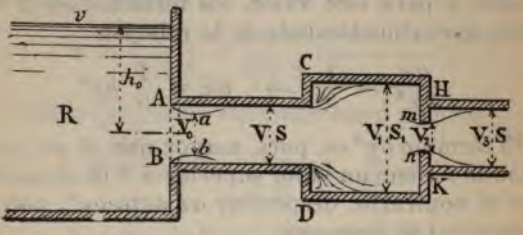


Fig. 7.ª—Conductos de secciones variables.

Al salir del depósito R, el líquido se contrae al pasar por la sección ab, después se dilata para llenar toda la sección del tubo: este fenómeno equivale á un ensanchamiento brusco á partir de la sección contraída, y da lugar, por tanto, á la pérdida de carga correspondiente.

La fórmula de Belanger

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_o^2}{2g} = h_1 - h + \left(H - \frac{(V_o - V)^2}{2g}\right)$$

puede simplificarse mucho en este caso: en efecto, V será la velocidad aguas abajo de ab, V_o la de la sección contraída, $h_1 = \frac{p_1}{d}$ es la presión hidrostática en la sección citada, $h = \frac{p}{d}$ la que existe aguas abajo, y por último H es nula, puesto que es la diferencia de nivel de los centros de gravedad que están situados en el eje que suponemos horizontal.

Se podrá escribir, por lo tanto:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{(V_o - V)^2}{2g} = \frac{V_o^2}{2g} + \frac{p_1}{d} - \frac{p}{d}.$$

Si designamos ahora por h_o la altura del agua, generatriz de la velocidad V_o en la sección contraída, es decir, la altura del nivel constante del recipiente por encima del eje del tubo, el teorema de Bernoulli aplicado entre el nivel superior y la sección contraída, nos dará:

$$\frac{v^2}{2g} + h_o + \frac{p_a}{d} = \frac{V_o^2}{2g} + \frac{p_1}{d}$$

y como la velocidad v en la superficie del recipiente es nula,

$$h_o = \frac{V_o^2}{2g} + \frac{p_1}{d} - \frac{p_a}{d}.$$

Por último, en el caso en que la contrapresión que actúa sobre la sección $c\,d$ fuese igual á la presión atmosférica p_a, se tendría:

$$\frac{p_a}{d} = \frac{p}{d}$$

de donde,

$$h_o = \frac{V_o^2}{2g} + \frac{p_1}{d} - \frac{p}{d}.$$

y por consecuencia, la fórmula de Belanger, se convierte en

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{(V_o - V)^2}{2g} = h_o.$$

Se podía haber establecido directamente esta fórmula, teniendo en cuenta que, si se supone que la presión atmosférica se ejerce á la vez sobre la superficie libre del recipiente y sobre la sección más aguas abajo del tubo, h_o constituye realmente la altura generatriz total, puesto que las dos presiones iguales y contrarias se equilibran y se anulan: esta altura h_o debe ser, por lo tanto, igual á la suma de las alturas $\frac{V^2}{2g}$ y $\frac{(V_o - V)^2}{2g}$ correspondientes, la primera á la velocidad, y la segunda á la pérdida de carga debida al ensanchamiento brusco.

Sabemos que la sección contraída es solamente 0,62 de la sección total del tubo, y las velocidades en estas secciones están en razón inversa ó sea:

$$V = 0{,}60\ V_o$$

de donde se deduce

$$V_o - V = 0{,}38\ V_o \quad \text{y} \quad (V_o - V)^2 = 0{,}38^2\ V_o^2;$$

Sustituyendo este valor en la expresión que da h_o, se encuentra:

$$h_o = \frac{V^2}{2g} + 0{,}38^2 \times \frac{V_o^2}{2g}$$

y como se tiene que

$$V_o = \frac{V}{0{,}62}$$

resulta

$$h_o = \frac{V^2}{2g} + \frac{V^2}{2g} \times \left(\frac{0{,}38}{0{,}62}\right)^2 = \frac{V^2}{2g} + 0{,}376\ \frac{V^2}{2g}.$$

El valor de h_o en función de la velocidad V, aguas abajo de la sección contraída, será, por consiguiente,

$$h_o = 1{,}376 \times \frac{V^2}{2g}$$

y se tendrá, inversamente que

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{1}{1{,}376}\, h_o = 0{,}72\, h_o .$$

En realidad, la velocidad V es menor que la que resultaría de esta expresión, á causa de los rozamientos del agua contra las paredes interiores del tubo, que no han sido tenidos en cuenta y se encuentra experimentalmente que:

$$\frac{V^2}{2g} = 0{,}67\, h_o \quad \text{y} \quad h_o = \frac{1}{0{,}67} \times \frac{V^2}{2g}.$$

Volvamos ahora á la fórmula de Belanger, tal como quedaba simplificada en el caso particular que estamos estudiando, y de ella se deducirá el valor de la pérdida de carga

$$\frac{(V_o - V)^2}{2g} = h_o - \frac{V^2}{2g}$$

y en virtud de la relación anterior

$$\frac{(V_o - V)^2}{2g} = h_o - 0{,}67\, h_o = 0{,}33\, h_o .$$

Por consecuencia, la pérdida de carga que se produce á la salida del recipiente, en el tubo que le sirve de continuación, es igual al tercio de la carga h_o sobre el centro del orificio.

Se puede escribir además, que

$$\frac{(V_o - V)^2}{2g} = \frac{0{,}33}{0{,}67} \times \frac{V^2}{2g} = \frac{1}{2} \times \frac{V^2}{2g}$$

es decir, que la pérdida de carga es igual á la mitad de la altura generatriz de la velocidad V y recíprocamente, que para obtener esta velocidad en el tubo, será preciso dar á la carga que actúa sobre el centro del orificio, una altura h capaz de producir la carga generatriz $\frac{V^2}{2g}$ aumentada en $\frac{1}{2} \times \frac{V^2}{2g}$ ó sea:

$$h = \frac{3}{2} \times \frac{V^2}{2g} = 1{,}5 \frac{V^2}{2g}.$$

Para evaluar la pérdida de carga que se produce en cualquier otro caso especial, no hay más que tener en cuenta las consideraciones anteriores.

En CD se presenta un ensanchamiento brusco de sección y el agua entra en la parte CK del tubo, formando remolinos que absorben una cierta cantidad de movimiento, dando lugar á una pérdida de carga que ya hemos calculado.

Siendo V y V_1 las velocidades aguas arriba y aguas abajo de la sección CD, esta pérdida de carga vendrá expresada por

$$\frac{(V - V_1)^2}{2g}.$$

Como evidentemente, en cada instante, pasa el mismo volumen de agua por todas las secciones, se tiene que

$$V_1 \times S_1 = V \times S$$

de donde

$$V_1 = \frac{V \times S}{S_1}$$

y se podrá escribir

$$V - V_1 = V - V\,\frac{S}{S_1} = V\left(1 - \frac{S}{S_1}\right)$$

y finalmente

$$\frac{(V - V)^2}{2g} = \frac{V^2}{2g} \times \left(1 - \frac{S}{S_1}\right)^2.$$

Por último, en la sección $H\,K$, sale el agua por un orificio en pared delgada, y hay á la vez contracción al paso por el orificio y ensanchamiento brusco después: si designamos por V_2 la velocidad en la sección contraída, la pérdida de carga, correspondiente siempre á la diferencia de velocidades aguas arriba y aguas abajo, viene dada por la expresión

$$\left(\frac{V_2 - V_3}{2g}\right)^2.$$

El movimiento permanente del agua á todo lo largo de la tubería permite escribir, llamando S_2 el área del orificio en pared delgada y teniendo en cuenta que la sección contraída es igual á $0{,}62\,S_2$:

$$0{,}62\,S_2 \times V_2 = S_3 \times V_3,$$

de donde

$$V_2 = \frac{S_3}{0{,}62\,S_2} \times V_3$$

y expresando la pérdida en función de la velocidad V_3 á la salida, se obtendrá:

$$\frac{(V_2 - V_3)^2}{2g} = \frac{V_3^2}{2g} \times \left(\frac{S_3}{0{,}62\,S_2} - 1\right)^2.$$

Estas son las distintas pérdidas de carga debidas á las variaciones bruscas de sección á lo largo de las tuberías de distribución.

11. Cambios de dirección.—Fórmulas diversas.—Hemos supuesto hasta ahora que las tuberías seguían siempre la misma línea recta, pero en la práctica presenta frecuentemente su trazado cambios de dirección; las diversas alineaciones deben enlazarse por tubos intermedios curvos, á no ser que dos direcciones diferentes se unan directamente, presentando un codo brusco en forma de ángulo.

Es evidente que en estos distintos cambios de dirección, el líquido choca contra las paredes de los tubos, resultando remolinos que deben producir necesariamente pérdidas de carga tanto mayores cuanto más brusca es la transición y menor el radio de curvatura del codo.

No es posible determinar por el cálculo estas pérdidas de carga, pero se han establecido fórmulas empíricas que permiten determinar en cada caso, aproximadamente, la pérdida de carga relativa á cambios bruscos de sección ó á cambios de dirección por codos redondeados.

La siguiente fórmula, debida á Navier, es aplicable al cálculo de la pérdida de carga en un codo curvo:

$$P = \frac{v^2}{2g} \times (0,0039 + 0,0186\, r) \times \frac{a}{r^2}$$

en la cual v es la velocidad media del líquido resultante del gasto y de la sección del tubo, r es el radio medio de curvatura del tubo, y a la longitud del arco desarrollado correspondiente.

Supongamos, por ejemplo, dos direcciones rectas que forman un ángulo de 80° unidas por un codo cuyo radio en su eje medio fuese 1 metro; el ángulo abrazado por el arco será igual al suplemento del ángulo de las dos direcciones, ó sea 180 — 80 = 100 grados. El valor de a será, por consiguiente,

$$a = 2\,\pi \times r \times \frac{100}{360} = \frac{\pi \times r \times 100}{180} = 1{,}744 \text{ m.};$$

si admitimos una velocidad media de 1 metro, la pérdida de carga será:

$$P = \frac{1}{19{,}62} \times (0{,}0039 + 0{,}0186) \times 1{,}744 = 0{,}002,$$

lo que corresponde á $\frac{2}{100}$ de atmósfera, cantidad enteramente despreciable.

Aun con un ángulo interior relativamente agudo, de 40 grados, por ejemplo, y un radio de curvatura de 0,50 metros solamente, para la misma velocidad de 1 metro que antes, la caída de presión no sería más que

$$P = \frac{1}{19{,}62} \times (0{,}0039 + 0{,}0093) \times \frac{1{,}22}{0{,}25} = 0{,}0033.$$

Se ve, pues, que en el caso de codos circulares las pérdidas de carga tienen poca importancia, puesto que en una canalización que tuviera 100 codos de esta naturaleza, sólo se perdería $\frac{1}{30}$ de atmósfera próximamente.

Hay otras fórmulas, especialmente la de M. Rankine, que dan resultados más exactos, porque tienen en cuenta el diámetro de la tubería que debe influir evidentemente en la pérdida de carga; pero estas fórmulas son mucho más complicadas y de una aplicación más difícil.

En el caso de codos bruscos por uniones directas, la pérdida de carga depende de un coeficiente K, que tiene por valor:

$$K = 0{,}946 \times \left(\frac{a}{c}\right)^2 + 2{,}047 \times \left(\frac{a}{c}\right)^4;$$

para medir $\frac{a}{c}$ se toma sobre la bisectriz del ángulo interior de las dos direcciones una distancia c cualquiera, á partir del vértice, y se baja desde su extremo una perpendicular á uno de los lados del ángulo, y la longitud de esta perpendicular es a.

Sea $\frac{a}{c} = 0{,}7$, lo cual corresponde á un ángulo de las dos direcciones de 90°, resulta:

$$K = 0{,}946 \times 0{,}49 + 2{,}047 \times 0{,}24 = 0{,}955.$$

La fórmula de Rankine da en este caso para la pérdida de carga:

$$P = K \times \frac{v^2}{2g} = 0{,}955 \times \frac{v^2}{2g}$$

y si v es 1 m. por ejemplo:

$$P = \frac{0{,}455}{19{,}620} = 0{,}048$$

lo que indica que en cien codos de este tipo se perdería aproximadamente media atmósfera.

Hemos estudiado ya, por lo tanto, todos los casos más notables de pérdida de carga que pueden presentarse á lo largo de una tubería y vamos ahora á resumirlos:

1.° *Pérdida de carga debida á rozamientos en tuberías rectas:*

$$K = \frac{C \times l}{S} \times (a\,v + b\,v^2).$$

2.° *Pérdida de carga por ensanchamiento brusco de sección:*

$$K_1 = \frac{(V_0 - V)^2}{2g}.$$

3.° *Pérdida de carga al salir el líquido de un recipiente, para entrar en una tubería:*

$$K_2 = \frac{1}{2}\,\frac{V^2}{2g}.$$

4.° *Pérdida de carga por paso brusco de la sección S á la S_1 y de la velocidad V á la V_1:*

$$K_3 = \frac{V^2}{2g} \times \left(1 - \frac{S}{S_1}\right)^2.$$

5.° *Pérdida de carga al pasar bruscamente de un orificio en pared delgada de sección S_1, á una sección S y á la velocidad V:*

$$K_4 = \frac{V^2}{2g} \times \left(\frac{S}{0{,}62\,S_1} - 1\right)^2.$$

6.° *Pérdida de carga en un codo curvo:*

$$K_5 = \frac{V^2}{2g} \times (0{,}0039 + 0{,}0186\,r) \times \frac{\alpha}{r^2}.$$

7.° *Pérdida de carga en un codo brusco:*

$$K_6 = \frac{V^2}{2g} \times \left[0{,}946 + 2{,}047 \left(\frac{a}{c}\right)^2\right] \times \left(\frac{a}{c}\right)^2.$$

Teniendo en cuenta todas estas pérdidas de carga, la fórmula de Bernoulli toma la forma

$$\frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o}{d} + Z_o = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{d} + Z_1 + K_1 + K_2 + K_3 + K_4 + K_5 + K_6$$

en la que K_1 K_2..... representan alturas de carga suplementarias, absorbidas por las diversas causas de pérdida de carga.

12. Cálculo del gasto de una tubería cilíndrica.—Las fórmulas establecidas precedentemente, permiten resolver los distintos problemas que se refieren al movimiento de los líquidos en los tubos de conducción.

Como aplicación, estudiaremos, en primer lugar, las condiciones del movimiento del agua *en una*

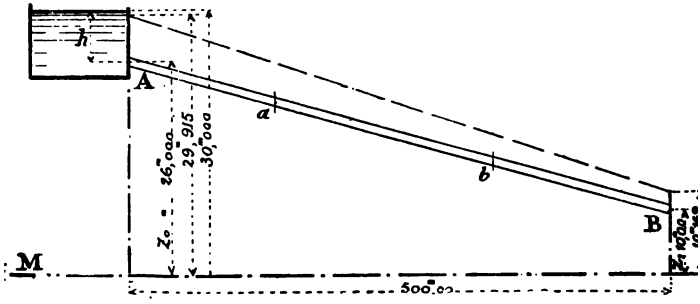


Fig. 8.ª—Movimiento en una tubería.

tubería cilíndrica alimentada por un recipiente en el cual se mantiene constante el nivel del líquido.

Para ello, tomaremos un ejemplo numérico de la obra de M. Vigreux, *l'Art de l'ingenieur* que hemos tenido ya ocasión de citar.

Sea (fig. 8.ª) un depósito *A*, del cual parte una tubería de un diámetro interior uniforme de 0,120 metros y de una longitud de 500 metros: el nivel del agua en el depósito se mantiene constante á la cota de 30 metros por encima del plano de comparación *MN:* las cotas de los extremos del eje de la tubería, con relación al mismo plano, son respectivamente 26 y 10 metros, y *se trata de calcular el volumen de agua gastada por segundo por esta tubería.*

Como no hay en este caso ni codos ni cambios bruscos de sección, la fórmula general citada anteriormente se reducirá á

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{d} + Z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{d} + Z_1 + K;$$

teniendo el tubo, por hipótesis, una sección uniforme, y siendo el gasto el mismo en todas las secciones, se tiene en dos puntos cualquiera *a* y *b* por ejemplo:

$$\text{Gasto } Q_a = S \times v_0$$
$$\text{Gasto } Q_b = S \times v_1$$

de donde

$$Q_a = Q_b = S \times v_0 = S \times v_1$$

y por consecuencia $v_0 = v_1$ ó dicho de otro modo, la velocidad es la misma en todas las secciones, lo cual era evidente.

Los dos términos $\frac{v_0^2}{2g}$ y $\frac{v_1^2}{2g}$ son iguales por consiguiente y pueden suprimirse en los dos miembros de la igualdad anterior, quedando ésta reducida á

$$\frac{p_0}{d} + Z_0 = \frac{p_1}{d} + Z_1 + K$$

en la que K representa la pérdida de carga debida á los rozamientos del agua en todo el recorrido de la tubería rectilínea, siendo su valor:

$$K = \frac{C \times l}{S} \times (a v + b v^2)$$

C representa el perímetro del tubo cilíndrico y S su sección: se tiene ahora llamando D al diámetro, que

$$C = \pi D \quad y \quad S = \pi \frac{D^2}{4}.$$

El término $\frac{C}{S}$ que aparece en la fórmula es, por lo tanto,

$$\frac{C}{S} = \frac{\pi \times D}{\frac{\pi \times D^2}{4}} = \frac{4}{D}$$

y sustituyendo en el valor de K,

$$K = \frac{4 l}{D} (a v + b v^2)$$

se podrá escribir que

$$\frac{p_0}{d} + Z_0 = \frac{p_1}{d} + Z_1 + \frac{4 l}{D} \times (a v + b v^2).$$

Se trata ahora de aplicar esta fórmula entre los dos extremos A y B de la tubería, siendo fácil, por otra parte, determinar el valor de las presiones p_0 y p_1 en estas dos secciones.

En el extremo inferior, la presión es evidentemente la atmosférica, y se tiene:

$$p_1 = p_a;$$

en la sección superior, en el interior del recipiente, para una altura h de agua por encima del orificio, la presión sería:

$$p_0 = p_1 + h \times d;$$

pero como en realidad consideramos la presión en la sección A después de la contracción que se produce á la salida del recipiente, es necesario tener en cuenta la pérdida de carga que resulta, que es igual á la mitad de la altura generatriz de v (§ 10), y se tiene que

$$p_0 = p_a + d\,h - \frac{0{,}5\,v^2}{2\,g} \times d$$

resultando finalmente la fórmula

$$\frac{p_a}{d} + h - \frac{0{,}5\,v^2}{2\,g} + Z_0 = \frac{p_a}{d} + Z_1 + \frac{4\,l}{D}(a\,v + b\,v^2).$$

que también puede escribirse, cambiando los términos de miembro y simplificando

$$\frac{4\,l}{D} \times (a\,v + b\,v^2) + \frac{0{,}5\,v^2}{2\,g} = h + Z_0 - Z_1.$$

El segundo miembro representa la diferencia de altura entre el nivel del agua en el depósito y el extremo inferior de la tubería, ó dicho de otro modo, la carga total ejercida, la cual se emplea en vencer las resistencias que dan lugar á las absorciones ó pérdidas de carga expresadas por los dos términos del primer miembro.

Esta fórmula es bastante compleja y exigiría, para la determinación del valor de v, el empleo del cálculo algebráico, pero se puede resolver, de una manera indirecta, por aritmética, recurriendo á la segunda fórmula que daba el valor de K, que era (§ 9):

$$K = \frac{l \times C}{S} \times b\, v^2.$$

Sustituyendo este valor en la igualdad anterior resulta:

$$\frac{4\,l}{D} \times b\, v^2 + \frac{0{,}5\, v^2}{2\,g} = h + Z_0 - Z_1$$

ó lo que es lo mismo, sacando v^2 factor común,

$$\left(\frac{4\,l}{D} \times b + \frac{0{,}5}{2g}\right) \times v^2 = h + Z_0 - Z_1$$

de donde:

$$v = \sqrt{\frac{h + Z_0 - Z_1}{\frac{4\,l \times b}{D} + \frac{0{,}5}{2g}}}$$

El coeficiente b se calcula, según Darcy, por la fórmula

$$b = 0{,}000507 + \frac{0{,}00000647}{r}$$

y como en el ejemplo escogido

$$r = \frac{D}{2} = 0{,}06.$$

Se deduce que

$$b = 0{,}000507 + \frac{0{,}00000647}{0{,}06} = 0{,}000615$$

de modo que se encuentra, sustituyendo las letras por sus valores

$$v = \sqrt{\frac{20}{\frac{4 \times 500}{0{,}12} \times 0{,}000615 + 0{,}02548}} = 1{,}395 \text{ m.}$$

Así se obtiene fácilmente el resultado que se buscaba, pero, como hemos visto, la fórmula simplificada de la pérdida de carga K es solamente aplicable cuando se trata de velocidades medias correspondientes á diámetros comprendidos entre 0,20 y 0,40 m.

Será preciso, por lo tanto, volver á emplear la fórmula completa en los demás casos, para obtener un resultado más exacto, pudiendo entonces valerse de la solución aproximada obtenida por la fórmula simplificada y emplear el método de las aproximaciones sucesivas.

Tomemos, pues, otra vez la fórmula

$$\frac{4\,l}{D} \times (a\,v + b\,v^2) + \frac{0{,}5\,v^2}{2\,g} = h + Z_o - Z_1.$$

Como el primer valor obtenido para v es superior á 1, el término en v^2 preponderará sobre el

término en v, y se podrá sustituir en lugar de v, el valor hallado, no quedando ya más incógnita que v^2 y resulta entonces:

$$\frac{4\,l}{D} \times (a \times 1{,}395) + \frac{4\,l}{D} \times \left(b + \frac{0{,}5}{2\,g}\right) v^2 = h + Z_0 - Z_1$$

y reemplazando las letras por sus valores en el ejemplo que estamos resolviendo (§ 9)

$$\frac{4 \times 500}{0{,}12} \times (0{,}000018 \times 1{,}395) +$$

$$+ \frac{4 \times 500}{0{,}12} \times \left(0{,}000348 + \frac{0{,}5}{19{,}62}\right) \times v^2 = 20$$

y haciendo operaciones y pasando al segundo miembro todos los términos que no contienen v^2

$$5{,}82548\ v^2 = 19{,}582$$

de donde

$$v^2 = \frac{19{,}582}{5{,}825} = 3{,}361428$$

y

$$v = \sqrt{3{,}361428} = 1{,}833.$$

Se podría volver á empezar el cálculo, sustituyendo este nuevo valor de v en la fórmula, pero se encontraría un resultado sensiblemente igual y en general, basta un solo cálculo para obtener una solución suficientemente aproximada.

En el caso actual, el valor exacto es 1,82.

El gasto Q por segundo se deduce de la fórmula

$$Q = S \times v = \frac{\pi D^2}{4} \times 1{,}82 = 0{,}0205 \text{ m}^3$$

ó sean 20,5 litros, por segundo.

La línea de puntos de la figura cuyos extremos tienen las cotas 30 m. y 10,169 m. con relación al plano de comparación MN, pasa por los vértices de las columnas piezométricas en cada punto de la tubería AB.

Una vez trazada esta línea, basta levantar en los distintos puntos perpendiculares á MN y los trozos de estas rectas comprendidos entre el eje del tubo y la línea de puntos representan las alturas piezométricas correspondientes.

La longitud total H de la perpendicular comprende, además de la altura piezométrica, la altura de los diferentes puntos de la tubería considerados por encima del plano de comparación MN, y si designamos de una manera general esta altura por Z y por t la altura piezométrica, tendremos:

$$H = t + Z.$$

Ahora bien; la columna de agua que produciría la altura piezométrica en cada punto de la tubería, constituye la altura de carga que produce el movimiento y que se gasta, por una parte, en vencer los rozamientos del agua contra la pared interior del tubo, y por otra, en engendrar la velocidad v de que está animada el agua; se tendrá, por lo tanto,

$$t = \frac{v^2}{2g} + \frac{4l}{D}(a v + b v^2)$$

y

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{4l}{D}(a v + b v^2) + Z.$$

En esta fórmula, $\frac{v^2}{2g}$ es la altura generatriz de la velocidad; el segundo término es la altura de carga absorbida por los rozamientos contra las paredes interiores en la longitud l de la tubería comprendida entre el punto considerado y su extremo B.

En este último punto, como l es cero, H se reduce á

$$H = \frac{v^2}{2g} + Z = 0{,}169 + 10 = 10{,}169 \text{ metros},$$

que es la cota indicada en la figura.

En el extremo más alto, á la salida del depósito, se tiene evidentemente

$$H = Z_o + h = 26 + 4 = 30 \text{ metros};$$

pero si se toma el nivel después de la sección contraída, es necesario deducir la pérdida de carga debida á esta contracción, y cuyo valor es igual á

$$0{,}5\,\frac{v^2}{2g} = 0{,}5 \times 0{,}169 = 0{,}0845,$$

de donde se deduce

$$H = 30 - 0{,}00845 = 29{,}915 \text{ metros},$$

que da el punto de partida de la línea piezométrica. Esta línea es una recta cuyos extremos están á 29,915 metros y á 10,169 por encima del plano de comparación *M N*.

En efecto; tomemos el valor de las alturas piezométricas

$$t = \frac{v^2}{2g} + \frac{4\,l}{D} \times (a\,v + b\,v^2);$$

si restamos de los dos miembros $\frac{v^2}{2g}$ quedará

$$t - \frac{v^2}{2g} = \frac{4\,l}{D} \times (a\,v + b\,v^2).$$

El primer miembro representa las diversas alturas piezométricas comprendidas entre la línea de puntos de los nivèles y el eje del tubo, hecha deducción de la altura constante

$$\frac{v^2}{2g} = 0,169.$$

Estas alturas reducidas así, están comprendidas entre la línea de puntos y otra ficticia trazada paralelamente al eje del tubo por el punto que tiene la cota 10,169 m.

Si llamamos v la altura reducida así, de modo que se tenga que

$$v = t - \frac{v^2}{2g}$$

y si al mismo tiempo hacemos

$$\frac{4}{D} \times (a\,b + b\,v^2) = K$$

valor constante, puesto que es el producto de cantidades invariables, como la velocidad v en particular es constante por hipótesis, se podrá escribir que

$$v = K \times l.$$

Esta expresión demuestra que la cantidad en que hay que elevarse, por encima de la línea ficticia paralela al tubo, cuando se asciende á lo largo de la línea piezométrica, es proporcional al camino l recorrido sobre esta última línea, de donde se deduce que la pendiente ó inclinación de ésta con relación á la línea ficticia es constante, que es lo que caracteriza á una línea recta.

Basta, pues, calcular los dos puntos extremos del origen y del fin de la tubería. como lo hemos hecho, para obtener, por la unión de estos dos puntos, la línea directa que pasa por los niveles piezométricos, en todos los puntos de la conducción.

Esta línea es interesante porque demuestra cómo la altura piezométrica, que es, en suma, la altura generatriz del movimiento, va disminuyendo progresivamente desde el depósito en que nace la tubería hasta el extremo inferior de ésta.

13. Cálculo de una tubería cónica equivalente á la cilíndrica.—La línea que forma el diagrama de los niveles piezométricos tiene una gran pendiente y cae rápidamente á lo largo de la tubería cilíndrica y no sería la misma, puesto que la curva del diagrama descendería de una manera casi insensible

en los cuatro quintos de su longitud, si se sustituyera la tubería cilíndrica de diámetro constante, por otra cónica, cuyo diámetro en el origen fuese superior á 0,12 metros y el de la base inferior á esta cifra.

En el último trozo de 100 metros, cuyo diámetro medio sería relativamente pequeño, la pérdida de carga debida al frotamiento sería grande y la curva piezométrica bajaría rápidamente hasta *B*.

La curva uniformemente cónica tiene un interés más teórico que práctico; desde este punto de vista puede reemplazarse por una serie de tubos cilíndricos de diámetros decrecientes, que tengan las dimensiones usuales de la industria y que se coloquen unos á continuación de otros, sin enlaces de acuerdo especiales.

Para evitar fórmulas complicadas y laboriosos cálculos, se podrá suponer dada la relación entre los diámetros de las secciones extremas de la tubería cónica; sea, por ejemplo,

$$D_1 = 2\,D_2;$$

después se determinarán estos diámetros de tal manera que su media aritmética sea igual al diámetro de la tubería cilíndrica de sección constante *D*, ó sea 0,120 metros en el caso estudiado. Se tendrá, por lo tanto,

$$\frac{D_1 + D_2}{2} = 0{,}12 \quad \text{ó} \quad \frac{3\,D^2}{2} = 0{,}12,$$

de donde

$$D_2 = 0{,}08 \quad y \quad D_1 = 0{,}160.$$

Suponiendo aproximadamente equivalente esta tubería cónica á la cilíndrica, se la reemplazará, como hemos dicho, por la serie de tubos cilíndricos de diversos diámetros, tomando por ejemplo cinco trozos, para la conducción dada de 500 metros de longitud.

Los diámetros de estos trozos se adaptarán á las dimensiones comerciales; sean éstas:

$$d_1 = 0{,}175 \text{ metros}, \quad d_2 = 0{,}150, \quad d_3 = 0{,}125$$
$$d_4 = 0{,}100 \text{ y } d_5 = 0{,}080 \text{ metros}.$$

Para determinar la longitud que debe darse á cada uno de estos trozos, habrá que recurrir á la fórmula

$$\frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o}{d} + Z_o = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{d} + Z_1 + K.$$

Sustituyamos, como antes, p_1 y p_o por sus valores

$$p_1 = p_o$$

y

$$p_o = p_a + d \times h - \frac{0{,}5\, v^2}{2g} \times d.$$

y quedará

$$\frac{v_o^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{0{,}5\, v_o^2}{2g} + (h + Z_o - Z_1) = K.$$

Para simplificar haremos:

$$H = (h + Z_o - Z_1).$$

que es la diferencia de altura entre el nivel del agua en el depósito y el extremo inferior de la tubería.

En esta fórmula v_0 es la velocidad inicial en el primer tubo superior y v_1 la velocidad en el último trozo inferior.

El término K designa las pérdidas de carga que son debidas á dos causas: por una parte, las pérdidas procedentes de las disminuciones bruscas de sección al paso de cada trozo de la tubería al siguiente; y por otra, las pérdidas causadas por el rozamiento en los distintos tubos. Sean K' y K'' estas pérdidas, y se tendrá:

$$K = K' + K''.$$

Las pérdidas parciales tienen por expresión general:

$$k' = \frac{0{,}5\, v^2}{2g} = \frac{v^2}{4g}$$

y

$$k'' = \frac{4\,l}{D} \times (a\,v + b\,v^2).$$

Tendremos, por lo tanto: *suma de pérdidas análogas á* $k' =$

$$K' = \frac{v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + v_5^2}{4g}$$

y *suma de pérdidas análogas á* $k'' =$

$$K'' = 4\left[\frac{l_1}{d_1} \times (a\,v_1 + b\,v_1^2) + \ldots + \frac{l_5}{d_5} \times (a\,v_5 + b\,v_5^2)\right]$$

Se puede expresar, además, la velocidad v en función del gasto Q y del diámetro del trozo de tubería correspondiente, puesto que de una manera general se tiene:

$$v = \frac{Q}{S}$$

y como $S = \frac{\pi d^2}{4}$, resulta

$$v = \frac{4\,Q}{\pi\,d^2} \quad \text{y} \quad v^2 = \frac{16\,Q^2}{\pi^2\,d^4}\ ;$$

y sustituyendo se tendrá, por lo tanto,

$$K' = \frac{4\,Q^2}{\pi^2\,g} \times \left(\frac{1}{d_2^4} + \frac{1}{d_3^4} + \frac{1}{d_4^4} + \frac{1}{d_5^4}\right).$$

En cuanto á los términos de K'', cada uno contiene dos partes análogas á

$$4\,a \times v_1 \times \frac{l_1}{d_1} = \frac{16\,.\,a\,.\,Q}{\pi} \times \frac{l_1}{d_1^5}$$

por una parte y á

$$4\,b\,.\,v_1^2 \times \frac{l_1}{d_1} = \frac{64\,b\,.\,Q^2}{\pi^2} \times \frac{l}{d_1^5}$$

por otra.

Volvamos á tomar ahora la fórmula general, y sustituyendo v_0 por v_1 y v_1 por v_5 velocidades inicial y final, queda:

$$\frac{0{,}5\,v_1^2}{2g} - \frac{v_5^2}{2g} + H = K$$

relación que también puede escribirse así, restando K de los dos miembros:

$$\frac{4\,Q^2}{\pi^2 g} \times \frac{1}{d_1^4} - \frac{8\,Q^2}{\pi^2 g} \times \frac{1}{d_5^4} + H - K = 0.$$

Substituyendo K por su valor en función de K' y K'' y teniendo en cuenta que el primer término de esta fórmula es análogo á los términos de K' y que el segundo término $\left(-\frac{8\,Q^2}{\pi^2 g} \times \frac{1}{d_5^4}\right)$ es el doble del último de K', el primer término de la relación podrá tomar, por último, la forma

$$H = \frac{4\,Q^2}{\pi^2 g}\left(\frac{1}{d_2^4} + \frac{1}{d_3^4} + \frac{1}{d_4^4} + \frac{3}{d_5^4} - \frac{1}{d_1^4}\right) - \frac{16aQ}{\pi} + \left(\frac{l_1}{d_1^5} + \ldots + \frac{l_5}{d_5^5}\right) - \frac{64\,b\,.\,Q^2}{\pi^2} \times \left(\frac{l_1}{d_1^5} + \ldots + \frac{l_5}{d_5^5}\right)$$

en la cual todo es conocido, menos la longitud l de las tuberías parciales.

Se sabe, además, que la suma de los cinco trozos de tubería es igual á la longitud total, $L = 500$ metros, de la canalización, de donde

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5;$$

y no hay inconveniente en hacer también

$$l_2 = l_3 = l_4 = l_5,$$

de donde resulta:

$$L = l_1 + 4\,l_2$$

y

$$l_1 = L - 4\,l_2,$$

valor que substituído en la expresión general da:

$$H - \frac{4\,Q^2}{\pi^2 g} \times \left(\frac{1}{d_2^4} + \ldots + \frac{1}{d_1^4}\right) - \frac{16\,a\,Q}{\pi} \times \left(\frac{1}{d_2^3} + \ldots + \frac{1}{d^3_5}\right) \times l_2 - \frac{16\,a\,Q}{\pi} \times \frac{L - 4l_2}{d_1^5} - \frac{64\,b\,Q^2}{\pi^2} \times \left(\frac{1}{d_2^5} + \ldots + \frac{1}{d_5^5}\right) \times l_2 - \frac{64\,Q^2}{\pi^2} \times \frac{L - 4l^2}{d_1^5}.$$

Agrupando los términos en L y l_2, se encuentra:

$$H - \frac{4\,Q^2}{\pi^2 g} \times \left(\frac{1}{d_2^4} + \ldots - \frac{1}{d_1^4}\right) - L \times \left(\frac{16\,a.Q}{\pi\,d_1^5} + \frac{64\,b.Q^2}{\pi^2\,d_1^5}\right) = \frac{16\,a.Q}{\pi} \times \left(\frac{1}{d_2^3} + \ldots + \frac{1}{d_5^5} - \frac{4}{d_1^3}\right) l_2 + \frac{64\,b.Q^2}{\pi^2} \times \left(\frac{1}{d_2^5} + \ldots + \frac{1}{d_5^5} - \frac{4}{d_1^5}\right) l_2.$$

Lo que demuestra que l_2 es el cociente del primer miembro de la igualdad por los factores que le multiplican en el segundo, ó sea:

$$l_2 = \frac{H - \frac{4\,Q^2}{\pi^2 g} \times \left(\frac{1}{d_2^4} + \ldots - \frac{1}{d_1^4}\right) - L \times \left(\frac{16\,a.Q}{\pi\,d_1^3} + \frac{64\,b.Q^2}{\pi^2\,d_1^5}\right)}{\frac{16\,a\,Q}{\pi} \times \left(\frac{1}{d_2^3} + \ldots - \frac{4}{d_1^3}\right) + \frac{64\,b.Q^2}{\pi^2} \times \left(\frac{1}{d_2^5} + \ldots - \frac{4}{d_1^5}\right)}.$$

Habrá, por lo tanto, que hacer los cálculos siguientes:

$$\frac{1}{1.150^4} + \frac{1}{0{,}125^4} + \frac{1}{0{,}100^4} + \frac{3}{0{,}080^4} - \frac{1}{0{,}175^4} = A$$

$$\frac{1}{0{,}150^3} + \frac{1}{0{,}125^3} + \frac{1}{0{,}100^3} + \frac{1}{0{,}080^3} - \frac{4}{0{,}175^3} = B$$

$$\frac{1}{0{,}150^5} + \frac{1}{0{,}125^5} + \frac{1}{0{,}100^5} + \frac{1}{0{,}080^5} - \frac{4}{0{,}175^5} = C$$

Se calculará también:

$$\frac{16\,a\,.\,Q}{\pi} = D$$

y

$$\frac{64\,b\,.\,Q^2}{\pi^2} = E$$

y llevando las cifras obtenidas al valor de l_2, se tendrá:

$$l_2 = \frac{H - \frac{4\,Q^2}{\pi^2\,g} \times A - L \times \left(\frac{D}{d_1{}^5} + \frac{E}{d_1{}^5}\right)}{D \times B + E \times C}$$

de la que se deduce fácilmente el valor numérico de l_2, y una vez conocido éste se sabe que l_3, l_4 y l_5 tienen el mismo, y en cuanto á l_1 se deduce restando de L cuatro veces l_2, puesto que $l_1 = L - 4\,l_2$.

Los valores que se obtienen en el caso particular estudiado son:

$$l_1 = 180 \text{ m. } l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = 80 \text{ m.}$$

demostrando que el primer trozo tiene próximamente doble longitud que los demás.

14. Cálculo de una red de distribución.—Uno de los problemas que se presentan con más frecuencia es el de la distribución del agua en una red de canalizaciones formada por conducciones ó tuberías principales y otras derivadas ó secundarias.

Como ejemplo de este caso vamos á considerar el representado en la figura 9.ª, que comprende:

Un depósito *A*, en el cual el nivel del agua se mantiene á la cota de 20 metros sobre el plano de comparación, con 3 metros de altura de agua.

Una tubería principal dividida en cinco trozos de longitudes y diámetros diferentes, cuyos extre-

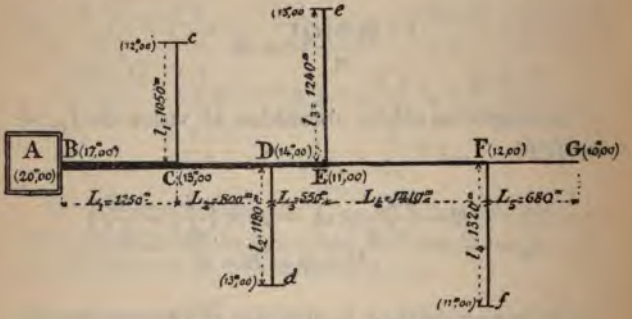


Fig. 9.ª—Red de canalización.

mos están á las distintas alturas que indican las cotas respectivas.

De los tubos de derivación enchufados en los extremos de las diversas secciones, y cuyos límites *c, d, e, f*, están á las alturas que indican sus cotas en la figura.

Se trata de determinar los diámetros de las secciones sucesivas de la tubería principal, para obtener en los extremos de cada tubería de derivación un gasto determinado que, en el caso actual, supondremos que es el mismo, 20 litros, por ejemplo, en todas las tuberías derivadas.

El problema parece muy complicado si se considera el conjunto de la red, pero se simplifica mucho si se estudia separadamente cada tubería secundaria como si no existiesen las demás.

De las cuatro tuberías derivadas, estudiaremos primero el trozo *E e*, por ejemplo, que es uno de los más alejados del depósito y al mismo tiempo termina en la cota máxima de 13 metros sobre el plano de comparación.

Si prescindimos, por lo tanto, de las derivaciones *C c* y *D d* que están entre el depósito y el tubo *E e*, es evidente que sucederá lo mismo que si sólo existiera una tubería única *B C D E e* que fuera del depósito al extremo *e* de la derivación considerada, que presentase gastos variables en los diversos trozos desde *B* hasta *E*.

En efecto, el gasto en *C D* viene disminuído en toda la corriente derivada por *C c*, y en *D E* sufre una nueva reducción que proviene de tomar el líquido el camino *D d*.

Salvo la variación del gasto que va disminuyendo desde el extremo superior á la base del tubo, se resolverá este caso como el de una tubería ordinaria sin derivaciones, teniendo en cuenta en los cálculos los cambios bruscos de sección y de dirección.

Aplicaremos, por lo tanto, la ecuación general á la canalización *B C D E e*, desde el fondo del de-

pósito en que termina el extremo B de la tubería, hasta el final e de la derivación.

Observaremos que, en el recipiente mismo, dada su gran capacidad, la velocidad del agua puede considerarse como nula, es decir, que la velocidad inicial v_o es cero, y por consecuencia, el término $\frac{v_o^2}{2g}$ es nulo y puede suprimirse en la fórmula.

Si designamos, por otra parte, las velocidades medias del agua en los diversos trozos L_1, L_2, L_3, l_3 por V_1, V_2, V_3, v_3 respectivamente, observaremos del mismo modo que la velocidad final v_1, que figura en la fórmula, no es otra cosa que la velocidad v_3 en el último trozo, de modo, que teniendo estas observaciones en cuenta, la fórmula general se convertirá en

$$\frac{p_o}{d} + Z_o = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{d} + Z_1 + K.$$

En esta fórmula, $\frac{p_o}{d}$ es la altura de carga por encima del fondo del recipiente en que nace la tubería; de modo que si designamos por h su altura ó profundidad, se tendrá:

$$\frac{p_o}{d} = \frac{p_a}{d} + h.$$

Del mismo modo, $\frac{p_3}{d}$ es la carga que debe existir en el extremo e de la tubería considerada, y como puede imponerse la condición de que el gasto en el extremo de esta tubería se haga bajo de-

terminada carga, que puede ser $h_3 = 3$ metros, por ejemplo, suponiendo que sea así, la carga total será:

$$\frac{p_3}{d} = \frac{p_a}{d} + h_3.$$

Z_0 es la cota del punto B origen de la tubería que es la misma que la de la base del depósito, cota inferior en 3 metros á la del nivel del agua é igual, por lo tanto, á 17 metros.

Z_1 es la cota del extremo e inferior de la tubería, ó sea 13 metros sobre el plano de comparación.

Según esto, la fórmula general será:

$$\frac{p_a}{d} + h + Z_0 = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_a}{d} + h_3 + Z_1 + K.$$

Los términos $\frac{p_a}{d}$ pueden suprimirse en los dos miembros; y por otra parte, la diferencia total de carga H entre el punto e y el depósito tiene por expresión:

$$H = h + Z_0 - (h_3 + Z_1)$$

y substituyendo y simplificando, queda:

$$H = \frac{v_3^2}{2g} + K,$$

lo cual quiere decir que la carga total efectiva se emplea en engendrar la velocidad v_3 y en vencer las resistencias que dan lugar á diversas pérdidas de carga, á todo lo largo de la tubería.

Las diferentes clases de pérdidas que hay que considerar en este caso son las siguientes:

1.ª Las pérdidas K_1 debidas á las resistencias de rozamiento en los diversos trozos de la tubería.

2.ª Las pérdidas K_2 que proceden de la contracción en el origen de la tubería e en B y de las disminuciones de sección en los puntos C y D.

3.ª La pérdida K_3 debida al cambio brusco de dirección en E.

Expresemos sucesivamente cada una de estas pérdidas:

$$K_1 = \frac{4 L_1}{D_1} \times (a V_1 + b V_1^2) + \frac{4 L_2}{D_2} (a V_2 + b V_2^2) + \frac{D L_3}{D_3} \times (a V_3 + b V_3^2) + \frac{4 l_3}{d_3} (a v_3 + b v_3^2).$$

Del mismo modo se tendrán que (§ 10):

$$K_2 = \frac{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}{4 g}.$$

Respecto á la carga ocasionada por el cambio de dirección en ángulo recto, en el punto E, puede expresarse por la fórmula establecida experimentalmente por Belanger, ó sea:

$$K_3 = \frac{3 v_3^2}{2 g}.$$

Substituyendo estos valores en la igualdad precedente, resulta:

$$II = \frac{1}{4 g} \times (V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + 8 v_3^2) + \frac{4 L_1}{D_1} \times (a V_1 + b V_1^2) + \frac{4 L_2}{D_2} (a V_2 + b V_2^2) + \frac{4 L_3}{D_3} \times (a V_3 + b V_3^2) + 4 \frac{l_3}{d_3} \times (a v_3 + b v_3^2).$$

Sabemos que se pueden reemplazar las velocidades desconocidas por su valor en función del gasto y del diámetro según la fórmula

$$v = \frac{4\,Q}{\pi\,d^2}.$$

Una vez hecha esta substitución, tendremos aún cuatro cantidades desconocidas, que son: D_1 D_2 D_3 y d_3, y como de una igualdad no puede deducirse más que el valor de una de las incógnitas, habrá que hallar D_1, por ejemplo, dando valores arbitrarios á las demás.

Por otra parte, puede suceder que estos valores escogidos arbitrariamente sean incompatibles con los datos del problema..

Vamos á ver cuál es el mejor medio de satisfacer á todas las condiciones exigidas.

Como la fórmula anterior contiene cuatro velocidades, es evidente que si se pudiese fijar una relación conveniente entre estas cuatro cantidades, el conocimiento del valor de una cualquiera de ellas bastaría para determinar fácilmente las demás.

La relación más sencilla que puede adoptarse es evidentemente la unidad, lo que equivale á admitir una velocidad igual en todos los trozos, ó sea:

$$V_1 = V_2 = V_3 = v_3.$$

Esta hipótesis, que no hay inconveniente en admitir en el caso actual, tiene la ventaja de simplificar considerablemente la fórmula primitiva.

Resulta, como consecuencia inmediata, que los diversos diámetros serán proporcionales á las raí-

ces cuadradas de los gastos correspondientes, puesto que, entre dos cualesquiera de las velocidades, existirá la relación

$$\frac{4\,Q_1}{\pi\,D_1^{\,2}} = \frac{4\,Q_2}{\pi\,D_2^{\,2}}$$

y suprimiendo factores comunes

$$\frac{Q_1}{D_1^{\,2}} = \frac{Q_2}{D_2^{\,2}}$$

ó bien

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{D_2^{\,2}}{D_1^{\,2}}$$

de donde se deduce

$$D_2 = D_1 \times \sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}}.$$

Del mismo modo se tendrá

$$D_3 = D_1 \times \sqrt{\frac{Q_3}{Q_1}} \quad \text{y} \quad d_3 = D_1 \times \sqrt{\frac{q_3}{Q_1}}.$$

Es decir, que expresaremos así los diferentes diámetros en función de uno de ellos D_1 que será la única incógnita del problema.

Por otra parte, si tenemos en cuenta la condición impuesta de que el gasto es el mismo en cada una de las tuberías de derivación, resulta inmediatamente, designando por q este gasto común que

$$q_3 = q, \quad Q_1 = 5\,q, \quad Q_2 = 4\,q \quad \text{y} \quad Q_3 = 3\,q.$$

Llevando estos valores á las expresiones precedentes se convierten en

$$D_2 = D_1 \times \sqrt{\frac{4}{5}},\ D_3 = D_1 \times \sqrt{\frac{3}{5}},\ d_3 = D_1 \times \sqrt{\frac{1}{5}}.$$

Ahora se puede simplificar la igualdad principal introduciendo la hipótesis de la igualdad de las velocidades medias y se convierte en

$$H = \frac{11 V_1^2}{4g} + 4 \times \left(\frac{L_1}{D_1} + \frac{L_2}{D_2} + \frac{L_3}{D_3} + \frac{l_3}{d_3} \right) \times \times (a V_1 + b V_1^2).$$

Expresaremos del mismo modo V_1 en función del gasto común q:

$$V_1 = \frac{20 q}{\pi D_1^2}.$$

Substituyamos ahora V_1, D_2, D_3 y d_3 en función de D_1 y quedará

$$H = \frac{1100 q^2}{g \pi^2 \times D_1^4} + \frac{80 a q}{\pi D_1^2} \times \left(\frac{L_1}{D_1} + \frac{L_2}{D_1 \sqrt{\frac{4}{5}}} + \frac{L_3}{D_1 \sqrt{\frac{3}{5}}} + \frac{l_3}{D_1 \sqrt{\frac{1}{5}}} \right) + \frac{1600 b q^2}{\pi^2 D_1^4} \times \left(\frac{L_1}{D_1} + \ldots\ldots + \frac{l_3}{D_1 \sqrt{\frac{1}{5}}} \right)$$

que puede transformarse en

$$H = \frac{1100\, q^2}{g\, \pi^2 D_1^4} + \frac{80\, a\, q}{\pi D_1^5} \times \sqrt{5} \times$$

$$\left(\frac{L_1}{\sqrt{5}} + \frac{L_2}{\sqrt{4}} + \frac{L_3}{\sqrt{3}} + l_3 \right) +$$

$$\frac{1600\, b\, q^2}{\pi^2 D_1^5} \times \sqrt{5} \times \left(\frac{L_1}{\sqrt{5}} + \ldots\ldots + l_3 \right).$$

Reduciendo los paréntesis al mismo denominador, para lo que hay que multiplicar por $\sqrt{60}$, se convierten, por reducción con el factor $\sqrt{5}$ que les precede, en

$$\sqrt{\frac{1}{12}} \times \left(L_1 \sqrt{12} + L_2 \sqrt{15} + L_3 \sqrt{20} + l_3 \sqrt{60} \right)$$

valor que puede calcularse inmediatamente, recordando que

$q = 0{,}020$; $L_1 = 1250$; $L_2 = 800$; $L_3 = 550$ y $l_3 = 1240$

y sustituyendo estos valores y los de las raíces en la expresión anterior, resulta:

$$\frac{1250 \times 3{,}464 + 800 \times 3{,}873 + 550 \times 4{,}472 + 1240 \times 7{,}746}{3{,}464} =$$

$$= 5.627{,}32.$$

La fórmula principal podrá, pues, escribirse de la manera que sigue, pasando todos los términos al primer miembro:

$$H - \frac{1100\,q^2}{g\,\pi_2\,D_1^4} - \frac{80 \times 5.627{,}32\,a\,q}{\pi\,D_1^5} -$$

$$- \frac{1600 \times 5627{,}32\,b\,q^2}{\pi^2\,D_1^5} = 0.$$

Se pueden multiplicar ahora todos los términos por D_1^5 y se obtiene haciendo los cálculos y simplificaciones

$$H \times D_1^5 - \frac{450.185{,}60\,a\,q\,D^2}{\pi} - \frac{1100\,q^2}{g\,\pi^2}\,D_1 -$$

$$- \frac{9.003.712\,b\,q^2}{\pi^2} = 0.$$

Todas las cantidades contenidas en esta fórmula son conocidas menos el diámetro D_1, puesto que tenemos, según los datos anteriores,

$$H = h + Z_0 - (h_2 + Z_1) = (3 + 17) - (3 + 13) = 4$$

y

$$a = 0{,}0000173;\ b = 0{,}000348;\ q = 0{,}020;\ q^2 = 0{,}0004.$$

Substituyendo y dividiendo todos los términos por $H = 4$, queda:

$$D_1^5 - 0{,}012386\,D_1^2 - 0{,}00113685\,D_1 - 0{,}031975 = 0$$

llegando, por lo tanto, á una ecuación de quinto grado en D_1.

Calcularemos por aproximaciones sucesivas y despreciando los términos en D_1^2 y D_1 el valor de D_1 que será el obtenido de la ecuación

$$D_1^5 = 0{,}031975;$$

pero si no se quieren usar logaritmos, necesarios para extraer la raíz quinta, se puede llegar al mismo resultado, escribiendo la igualdad en la forma siguiente que resulta de dividir por D_1:

$$D_1^4 = \frac{0{,}012386\, D_1^2 + 0{,}001136\, D_1 + 0{,}031975}{D_1};$$

demos ahora un valor cualquiera á D_1 en el segundo miembro, por ejemplo, la unidad, y se obtendrá haciendo operaciones

$$D_1^4 = 0{,}045497; \quad D_1^2 = 0{,}2133 \quad \text{y} \quad D_1 = 0{,}461;$$

llevemos ahora este valor y el de D_1^2 al segundo miembro de la expresión que da el de D_1^4 y tendremos, haciendo todos los cálculos,

$$D_1^4 = 0{,}0763, \text{ de donde } D_1 = 0{,}525$$

y llevando este valor y el de $D_1^2 = 0{,}276$ nuevamente á la fórmula que da D_1^4 y extrayendo la raíz, se llega á un valor muy próximo á 0,514 que

es el valor exacto, no siendo necesario prolongar más los cálculos.

Calculado así el valor del diámetro D_1 se obtendrán inmediatamente los valores de los demás diámetros por medio de las relaciones anteriores y se tendrá:

$$D_1 = 0{,}514$$

$$D_2 = 0{,}514 \times \sqrt{\frac{4}{5}} = 0{,}460$$

$$D_3 = 0{,}514 \times \sqrt{\frac{4}{5}} = 0{,}398$$

$$d_3 = 0{,}514 \times \sqrt{\frac{1}{5}} = 0{,}230$$

El cálculo nos ha dado diámetros de las tuberías que corresponden exactamente á las condiciones impuestas, pero en la práctica habrá que adoptar los más próximos á los obtenidos, entre los que la industria ofrece al mercado, que supondremos que son:

0,500 m. para el valor de D_1
0,450 m. para el valor de D_2
0,400 m. para el valor de D_3 y
0,230 m. para el valor de d_3;

resultará necesariamente que la velocidad ya no será la misma en todos los trozos, en contra de las hipótesis introducidas en los cálculos para simplificar la solución del problema, pero encontraremos

fácilmente las nuevas velocidades aplicando para cada diámetro real la fórmula general

$$V = \frac{4\,Q}{\pi\,D^2}$$

y tendremos para la primera velocidad:

$$V_1 = \frac{4\,Q_1}{\pi\,D_1^2} = \frac{209}{\pi \times 0{,}5^2} = 0{,}509 \text{ m.};$$

de la misma manera

$$V_2 = 0{,}503;\ V_3 = 0{,}478 \quad \text{y} \quad v_3 = 0{,}408.$$

Calcularemos ahora las pérdidas de carga en cada uno de los trozos de la red por la fórmula general

$$K_1 = \frac{4\,L}{D} \times (a\,V + b\,V^2)$$

relativa á las resistencias de rozamientos, así como las pérdidas K_2 y K_3 debidas á las contracciones y al cambio brusco de dirección que vienen dadas respectivamente por las fórmulas

$$K_2 = \frac{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}{4\,g} \quad \text{y} \quad K_3 = \frac{3\,v_3^2}{2\,g}$$

así se obtiene sucesivamente, pasando del primer trozo *B C* al último *E e:*

$$K_1 \begin{cases} k_0 = \dfrac{4 \times 1250}{0{,}50} \times (a \times 0{,}509 + b \times \overline{0{,}509}^2) = 0{,}990\,\text{m}. \\ k_1 = \dfrac{4 \times 800}{0{,}45} \times (a \times 0{,}503 + b \times \overline{0{,}503}^2) = 0{,}689\,\text{m}. \\ k_2 = \dfrac{4 \times 550}{0{,}40} \times (a \times 0{,}478 + b \times \overline{0{,}478}^2) = 0{,}488\,\text{m}. \\ k_3 = \dfrac{4 \times 1240}{0{,}25} \times (a \times 0{,}408 + b + \overline{0{,}408}^2) = 1{,}289\,\text{m}. \end{cases}$$

$$K_2 = \frac{\overline{0{,}508}^2 + \overline{0{,}503}^2 + \overline{0{,}478}^2}{4\,g} = 0{,}019\,\text{m}.$$

$$K_3 = \frac{3 \times \overline{0{,}408}}{2\,g} = 0{,}026\,\text{m}.$$

Total de pérdidas de carga... 3,501 m.

Por lo tanto, la presión tiende á disminuir el efecto de la pérdida de carga, que va creciendo desde el origen de la tubería, hasta el extremo del tubo de derivación *E e*, y esta pérdida llega á tener el valor 3,501 metros en el extremo *e*.

Se dispone, pues, de una carga efectiva total:

$$H = h + Z_0 - (h_3 + Z_4) = 3 + 17 - (3 + 13) = 4\,\text{m}.$$

y como sólo se utilizan 3,501 metros, queda todavía una carga disponible de

$$4{,}00 - 3{,}50 = 0{,}50\,\text{m}.$$

Conviene tener esto presente para reducir aún más el diámetro de las tuberías, ó dicho de otro

porque está más lejos del origen. Se deduce de aquí que la carga efectiva correspondiente á este trozo es menor, en tanto que, teniendo la longitud en cuenta, es susceptible de absorber una pérdida de carga mayor; conviene, por lo tanto, satisfacer primero á las mayores exigencias de este trozo, siendo fácil después llenar las que exige el otro (figura 9.ª).

La cuestión se resolverá de la misma manera que precedentemente; el punto *E* representará el mismo papel que el punto *B*, origen de la primera parte, y el punto *f* será comparable al punto *e*.

La carga disponible *H* será la suma de las cargas acumuladas desde *E* hasta *f*, menos la altura piezométrica h_4 que debe ser reservada al punto *f*.

Si no hubiese pérdidas de carga entre el nivel del agua en el recipiente y el punto *E*, la carga en este punto será igual á la diferencia de sus cotas, ó sea:

$$Z_0 - Z_3 = 20 - 11 = 9;$$

pero la carga viene reducida en todas las pérdidas debidas á rozamientos y á los cambios de sección, desde el recipiente hasta el punto considerado: estas pérdidas son, como hemos visto,

$$K_1 = 0.990 + 0.689 - 0.919 = 2,598 \text{ m.}$$

y

$$K_2 = 0.023.$$

de donde

$$K_1 - K_2 = 2,621:$$

la altura piezométrica ó carga en el punto *E* será, por lo tanto:

$$N_3 = 9{,}00 - 2{,}621 = 6{,}379 \text{ m.}$$

De *E* á *f* se añade la carga debida á la diferencia de cotas de estos puntos, que es aquí nula puesto que se tiene:

$$Z_3 - z_4 = 11 - 11 = 0.$$

La carga total en *f* se reduciría, pues, á N_3, pero como el nivel piezométrico h_4 en *f* debe ser igual á 3 metros, altura de carga exigida por la salida del agua en este punto, queda sólo una carga disponible de

$$H = 6{,}379 - 3 = 3{,}379 \text{ m.}$$

Todas estas consideraciones pueden resumirse en la fórmula que se establece sin dificultad:

$$H = N_3 + (Z_3 - z_4) - h_4 = N_3 - h_4 = 3{,}379.$$

En el caso actual la fórmula general se convierte en

$$H = \frac{1}{4g} + (V_4^2 + 8\,V_4^2) + \frac{4L_4}{D_4} \times (a\,V_4 + b\,V_4^2) + 4\,\frac{l_4}{d} \times (a\,v_4 + b\,v_4^2).$$

Tenemos también, como antes,

$$q_4 = q;\ Q_4 = 2\,q;\ v_4 = V_4$$

$$d_4 = D_4 \times \sqrt{\frac{q}{Q_4}} = D_4 \times \sqrt{\frac{q}{2q}} = \frac{D_4}{\sqrt{2}}$$

de donde

$$H = \frac{9\,V_4^2}{4\,g} + 4\left(\frac{L_4}{D_4} + \frac{l_4}{d_4}\right) \times (a\,V_4 + b\,V_4^2)$$

y como

$$V_4 = \frac{4\,Q_4}{\pi\,D_4^2} = \frac{8\,q}{\pi\,D_4^2}$$

queda

$$H = \frac{144\,q_2}{g\,\pi_2\,D_4^4} + \frac{32\,a\,q}{\pi\,D_4^3} + (L_2 + l_4\sqrt{2}) + \frac{256\,b\,q^2}{\pi^2\,D_4^5} \times (L_4 + l_4\sqrt{2}).$$

Substituyendo L_4 y l_4 por sus valores, se obtiene:

$$L_4 + l_4\sqrt{2} = 1410 \mp 1320 \times 1{,}414 = 3276{,}48$$

y reduciendo y operando como antes, la fórmula se convierte en

$$H \times D_5 - \frac{104.847{,}36}{\pi} D_4^2 - \frac{144\,q^2}{g\,\pi^2} D_4 - \frac{838.778{,}88\,b\,q^2}{\pi^2} = 0;$$

reemplazando las letras por sus valores, y dividiendo por H, cuyo valor se ha recordado precedentemente, se encuentra:

$$D_4^5 - 0{,}003395\,D_4^2 - 0{,}000176\,D_4 - 0{,}003501 = 0.$$

Emplearemos el mismo procedimiento que al principio, escribiendo que

$$D_4^4 = \frac{0{,}003395\ D_4^2 + 0{,}000176\ D_4 + 0{,}093501}{D_4}$$

y obtendremos por aproximaciones sucesivas

$$D_4 = 0{,}330 \text{ m.}$$

de donde

$$d_4 = \frac{D_4}{\sqrt{2}} = 0{,}233.$$

Para estar dentro de las dimensiones comer les, tomaremos:

$$D_4 = 0{,}350 \text{ y } d_4 = 0{,}225$$

y las velocidades resultantes serán:

$$V_4 = \frac{4 \times 0{,}040}{\pi \times \overline{0{,}35}^2} = 0{,}416$$

y

$$v_4 = \frac{4 \times 0{,}020}{\pi \times \overline{0{,}225}^2} = 0{,}503.$$

Las pérdidas de carga serán, adoptando las i mas notaciones que antes,

$$K_4 \begin{cases} k_0 = \dfrac{4 \times 1410}{0{,}35} \times (a \times 0{,}416 + b \times \overline{0{,}416}^2) = 1{,}08 \\ k_1 = \dfrac{4 \times 1320}{0{,}255} \times (a \times 0{,}503 + b \times \overline{0{,}503}^2) = 2{,}27 \end{cases}$$

$$K_2 = \frac{\overline{0{,}416}^2}{4\,g} = 0{,}00$$

$$K_3 = \frac{3 \times \overline{0{,}503}^2}{2\,g} = 0{,}00$$

Total de pérdidas de carga... 3,36

Esta pérdida es ligeramente superior á la carga disponible H, que es sólo 3,379, pero la diferencia es bastante pequeña para que podamos despreciarla y considerar como buenos los valores encontrados para los diámetros D_4 y d_4.

Para calcular el último trozo de la conducción principal $F\,G$, procederemos de la misma manera, teniendo presente que no comprende más que una sección única y que no presenta cambios de dirección.

$$N_4 = Z_0 - Z_4 - K,$$

en la que K designa todas las pérdidas de carga en los diversos trozos de la tubería principal desde B hasta F, que son:

$$K_1 = 0{,}990 + 0{,}689 + 0{,}919 + 1{,}036 = 3{,}684$$

y

$$K_2 = 0{,}023 + 0{,}004 = 0{,}027,$$

siendo Z_0 y Z_4 las cotas del depósito y del punto F indicadas en la figura, se obtiene:

$$N_4 = 20 - 12 - (3{,}684 + 0{,}027) = 4{,}289 \text{ m.}$$

La carga disponible en el trozo $F\,G$ será, por tanto:

$$H = N_4 + (Z_4 - Z_5) - h_5,$$

en la que h_5 representa siempre la altura piezométrica común de 3 metros que debe ser mantenida á la salida de todos los tubos, gastándose, además,

la cantidad uniforme de 20 litros por segundo, y teniéndose, por consiguiente,

$$H = 4{,}289 + (12 - 10) - 3 = 3{,}289.$$

Las pérdidas de carga se componen solamente aquí de las que se deben á la disminución de la sección en el punto F y á las fuerzas de rozamiento en el trozo $F\,G$, de modo que la fórmula general se reduce á

$$H = \frac{1}{4\,g} \times (V_5^3 + 2\,V_5^2) + \frac{4\,L_5}{D_5} \times (a\,V_5 + b\,V_5^2)$$

fórmula de la cual se obtiene por el procedimiento ya indicado:

$$H\,D_5^5 \frac{16\,a\,q\,L_5}{\pi}\,D_5^2 - \frac{12\,q^2}{g\,\pi^2} - \frac{64\,b\,q^2\,L_5}{\pi^2} = 0$$

y substituyendo las letras por su valor

$$3{,}289\,D_5^5 - 0{,}0003643\,D_5^2 - 0{,}000015073\,D_5 - 0{,}00018662 = 0$$

El método de aproximaciones sucesivas da fácilmente

$$D_5 = 0{,}182$$

de donde

$$V_5 = \frac{4 \times 0{,}020}{\pi \times 0{,}182^2}\,0{,}769.$$

Las pérdidas de carga en el trozo $F\,G$ serán pues,

$$K_1 = \frac{4 \times 680}{0{,}182} \times (a \times 0{,}769 + b \times \overline{0{,}769}^2) = 3{,}274$$

y $K_2 = 0{,}013$

Total de pérdidas de carga... 3,287

volviendo así á encontrar el valor de H calculado precedentemente.

Como el diámetro 0,182 no es dimensión del comercio, se tomará para valor del mismo 0,180 ó 0,190; el primero dará lugar á una pérdida de carga superior á la admitida y la altura piezométrica en G será menor que 3 metros, y el segundo dará en este punto una carga mayor, ocasionando un gasto más elevado.

Se podrá vencer la dificultad reemplazando la tubería de diámetro uniforme por dos trozos de 0,190 y 0,180, teniendo cuidado de colocar primero el mayor. Las longitudes respectivas de estos dos trozos se podrán calcular para obtener exactamente la carga efectiva de 3 metros en el extremo G, empleando la fórmula que nos ha servido para determinar las longitudes de los diversos trozos cilíndricos que pueden substituir á una tubería uniformemente cónica (§ 13).

Pero se puede tratar de obtener más fácilmente un resultado también satisfactorio teniendo presente que el precio de una tubería es sensiblemente proporcional al producto de su diámetro por su longitud, pudiéndose, pues, imponer la condición de que el precio de los dos trozos sea el mismo que el de la tubería única de 0,182, lo cual podrá expresarse por la igualdad

$$0{,}190 \times x + 0{,}180 \times (680 - x) = 0{,}182 \times 680,$$

en la cual x representa la longitud del primer trozo de 0,190 de diámetro.

De aquí se deduce fácilmente:

$$(0{,}190 - 0{,}180)\, x = (0{,}182 - 0{,}180) \times 680$$

de donde

$$x = \frac{1{,}36}{0{,}10} = 136 \text{ m.}$$

Tomaremos, por lo tanto, el primer trozo de 0,190 de diámetro, de una longitud de 136 metros y el segundo de 0,180 de diámetro y 544 de longitud, con lo cual no se aumentará el coste y se habrá ganado en cuanto á la carga final disponible.

Las velocidades serán en los dos trozos:

$$V_5 = \frac{4 \times 0{,}020}{\pi \times 0{,}18^2} = 0{,}786 \text{ m. y } V_6 = \frac{4 \times 0{,}020}{\pi \times 0{,}19^2} = 0{,}706 \text{ m.}$$

Se podrán, pues, calcular las pérdidas de carga debidas á los rozamientos en cada sección y las que procedan de los cambios bruscos de sección que se producirán en el punto F y en el punto de unión de los dos trozos de diámetro distinto.

Si la suma de las pérdidas de carga es menor que 3,389 metros, se podrán aceptar las longitudes halladas anteriormente; en el caso contrario se verá fácilmente en qué sentido habrá que variar la relación de las longitudes de las dos secciones para que la pérdida de carga tenga el valor deseado, sacrificando un poco la economía.

No queda ya más que calcular el diámetro de los dos tubos Cc y Dd. En cuanto al primero, se

tendrá en cuenta que va unido al extremo del primer trozo principal *B C*, inmediatamente antes del origen de la sección *C D*, y por consiguiente, que el agua circula en el trozo en virtud de la altura piezométrica N_1 en el punto *C*.

Esta altura es evidentemente igual á la diferencia de las cotas de *A* y *C* disminuída en la pérdida de carga absorbida en todo el recorrido correspondiente, comprendiendo ésta la caída relativa al rozamiento del agua en el trozo *B C* y la relativa á la contracción que se produce á la salida del depósito; estas pérdidas son, según lo antes expuesto,

$$K_1 = 0{,}990 \text{ y } K_2 = \frac{\overline{0{,}509}^2}{4\,g} = 0{,}007$$

y tendremos, por lo tanto,

$$N_1 = 20 - 13 - (0{,}990 + 0{,}007) = 6{,}003 \text{ m.}$$

Sin embargo, la altura piezométrica en *C* no constituye toda la carga bajo la cual se mueve el agua de *C á c* en el tubo considerado, sino que se debe aumentar en la diferencia de las cotas en estos dos puntos, ó sea en

$$Z_1 - z_1 = 13 - 12 = 1.$$

Como, por otra parte, es necesario que quede una carga efectiva de 3 metros en el orificio de salida *c*, no se podrá disponer, para que el agua circule en la rama considerada, más que de una altura

737760

$$H = N_1 + (Z_1 - z_1) - h_1 = 6{,}003 + 1 - 3 = 4{,}003 \text{ m}$$

que es el valor que debe figurar en la fórmula general, obteniéndose, en virtud de lo expuesto,

$$H \times d_1^5 - \frac{16\,a\,q}{\pi} \times l_1 \times d_1^2 - \frac{32\,q^2}{g\pi^2} \times d_1 - \frac{64\,b\,q^2}{\pi^2} \times l_1 =$$

y substituyendo las letras por sus valores

$$4{,}003\,d_1^5 - 0{,}0004625\,d_1^2 - 0{,}000033\,d_1 - 0{,}000236 =$$

y siguiendo la marcha conocida

$$d_1^4 = \frac{0{,}00004625\,d_1^2 + 0{,}0000330\,d_1 + 0{,}0002360}{d_1}$$

obteniéndose, por aproximaciones sucesivas,

$$d_1 = 0{,}192.$$

Como este diámetro no es una dimensión corriente en la industria, se adoptará un tubo de 0,200 resultarán una velocidad y una pérdida de carg inferiores á las previstas, porque se tendrá:

$$V_1 = \frac{4 \times 0{,}020}{\pi \times \overline{0{,}20}^2} = 0{,}637 \text{ m.}$$

y las pérdidas de carga debidas á los rozamientos y al cambio de sección en la unión del tu serán:

$$K_1 = \frac{4 \times 1050}{0{,}200} \times (a \times 0{,}637 + b \times \overline{0{,}637}^2) = 3{,}197 \text{ m}$$

$$K_2 = \frac{3 \times \overline{0{,}637}^2}{2\,g} = 0{,}062 \text{ m}$$

Total de pérdidas de carga... 3,259 m

quedando, por lo tanto, todavía, un exceso de carga disponible de

$$H_1 = 4{,}003 - 3{,}259 = 0{,}744 \text{ m.}$$

que puede aprovecharse para disminuir el gasto de instalación substituyendo el tubo único de 0,200 por dos, uno de 0,200 y otro de 0,180, por ejemplo. Determinaremos sus longitudes respectivas lo mismo que antes, estableciendo que

$$(0{,}200 - 0{,}180)\, x = (0{,}192 - 0{,}180) \times 1{,}050$$

de donde

$$x = 630 \text{ m.}$$

El primer trozo deberá tener, en vista de esto, 630 metros, y el siguiente el resto, ó sean 420. Lo mismo que antes, también se verá si la pérdida de carga total en los dos tubos es ó no mayor que H y se aumentará si es necesario la longitud del tubo mayor, á expensas del otro, para quedar dentro de los límites impuestos.

El diámetro de la tubería $D\,d$ se calculará lo mismo. Tendremos:

$$K_1 = 0{,}990 + 0{,}689 = 1{,}679 \text{ m.}$$

$$K_2 = \frac{\overline{0{,}509}^2 + \overline{0{,}503}^2}{4\,g} = 0{,}013 \text{ m.}$$

de donde

$$N_2 = 20 - 14 - (1{,}679 + 0{,}013) = 4{,}308.$$

Se tiene, por otra parte, que

$$Z_2 - z_2 = 14 - 13 = 1;$$

y, por último,

$$H = N_2 + (Z_2 - z_2) - h_2 = 4{,}308 + 1 - 3 = 2{,}308 \text{ m.}$$

la ecuación general se convierte en:

$$2{,}308\, d_2^5 - 0{,}002079\, d_2^2 - 0{,}0001322\, d_2 - 0{,}001065 = 0$$

de donde

$$d_2^4 = \frac{0{,}000901\, d_2^2 + 0{,}0000573\, d_2 + 0{,}0004636}{d_2}$$

obteniéndose así

$$d_2 = 0{,}221 \text{ m.}$$

Conviniéndonos adoptar el diámetro comercial 0,225.

La velocidad resultante será:

$$v_2 = \frac{4 \times 0{,}020}{\pi \times \overline{0{,}225}^2} = 0{,}503.$$

De donde las pérdidas de carga:

$$K_1 = \frac{4 \times 1180}{0{,}225} \times (a \times 0{,}503 + b \times \overline{0{,}503}^2) = 2{,}030 \text{ m.}$$

$$K_2 = \frac{3 \times \overline{0{,}503}^2}{2\,g} = 0{,}039 \text{ m.}$$

Total de pérdidas de carga... 2,069 m.

pudiéndose hacer las mismas observaciones que antes sobre el exceso de carga disponible.

Los cálculos precedentes permiten establecer fácilmente las alturas piezométricas en el origen y en el extremo de cada una de las secciones que componen la tubería principal, y por consecuencia, en los puntos de inserción de las tuberías secundarias.

Se tendrá presente que estas alturas piezométricas vienen dadas por la altura vertical de la columna de agua que pesa sobre el punto considerado, la cual resulta de la diferencia de los niveles de este punto y de la altura del agua en el depósito, pero teniendo en cuenta que esta altura debe reducirse en las pérdidas de carga, aguas arriba del punto considerado.

Se debe también no olvidar que el nivel piezométrico desciende bruscamente en las secciones de unión de los tubos de distintos diámetros, y que, por consiguiente, hay que considerar dos niveles en la misma región, uno anterior y otro posterior á la sección de unión.

Estos dos niveles difieren en la caída de presión ó pérdida de carga debida al cambio brusco de sección, pérdida que hemos designado de una manera general por

$$K_2 = \frac{V^2}{4\,g}.$$

Tendremos, por ejemplo, en el punto *B*, origen del tubo *B C:*

$$N = 20 - 17 - \frac{V_1^2}{4\,g} = 20 - 17 - 0{,}007 = 2{,}943.$$

En el extremo *C* habrá aumentado en la dife-

rencia de cotas y habrá disminuído en la pérdida debida á los rozamientos, y se tendrá:

$$N_1 = 2{,}993 + (17 - 13) - K_1 = 6{,}993 - 0{,}990 - 6{,}003,$$

pero inmediatamente después, ó sea en el origen del tubo $C\,D$ se producirá una pérdida por contracción, y se tendrá:

$$n_1 = 6{,}003 - \frac{v_2^2}{4g} = 6{,}003 - 0{,}006 = 5{,}997$$

y así sucesivamente.

En el ejemplo escogido, la altura piezométrica, y por consiguiente la presión, es evidentemente mayor que la presión atmosférica en cada sección de la tubería: pero podría no suceder esto, si algún punto de la tubería estuviera más alto que el punto correspondiente de la línea de los niveles piezométricos. En esta zona el tubo funcionaría como un sifón, y al desprenderse el aire disuelto en el agua estorbaría el movimiento de ésta: conviene, pues, evitar estos defectos por un trazado conveniente del recorrido de la tubería.

15. Distribución con una tubería alimentada por dos depósitos.—Vamos ahora á estudiar el problema siguiente:

Supongamos una tubería recta alimentada por dos depósitos A y B con niveles constantes: se trata de determinar un punto O, en el que se va á tomar el agua, con la condición de que la altura piezométrica ó presión en este punto tenga un valor dado y que los gastos de los depósitos estén tam-

bién en una relación fijada por las condiciones del problema.

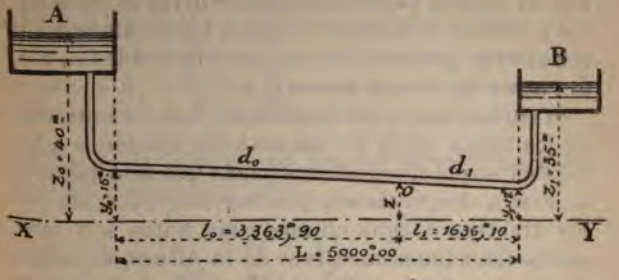


Fig. 10.—Tubería alimentada por dos depósitos.

Como se ve en la figura, las alturas de los depósitos por encima del plano de comparación $X\,Y$ son diferentes, y si no se estableciera un gasto de agua, estaríamos en el caso de vasos comunicantes, pasando el agua del depósito A al B, hasta tener el mismo nivel.

Si permanecen constantes, como hemos supuesto, los niveles A y B, esto quiere decir, que la presión superior del lado del recipiente A, es absorbida en parte por la pérdida de carga debida al gasto de agua en el trozo de la izquierda de longitud l_0, pérdida que debe ser evidentemente mayor que en el trozo de longitud e_1, para que pueda existir equilibrio.

Si se colocase en el punto O considerado, un tubo piezométrico, el agua se elevaría en él á una cierta altura h, que mediría justamente la presión interior en este punto: no es menos evidente que

esta columna de agua se equilibraría, por la izquierda con la presión del depósito A, y por la derecha con la del depósito B, si no hubiera que tener en cuenta las diferencias de nivel Z, Z_0 y Z_1, las pérdidas de carga debidas á los rozamientos y las alturas generatrices de las velocidades v_0 y v_1 del agua en los dos trozos l_0 y l_1.

Si suponemos, para simplificar, que los extremos de los tubos estén de tal manera ajustados á los depósitos que no produzcan mas que una pérdida de carga despreciable, y si tenemos presente que las diversas cargas enumeradas antes son solamente fracciones sucesivas de la altura de carga Z_0 del lado de A, ó Z_1 del lado de B, podremos escribir estas dos relaciones:

$$Z_0 = Z + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{4l_0}{d_0}(a.v_0 + b.v_0^2) + h$$

de donde

$$h = Z_0 - Z - \frac{v_0^2}{2g} - \frac{4l_0}{d_0}(a.v_0 + b.v_0^2)$$

y por otra parte

$$Z_1 = Z + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{4l_1}{d_1}(a.v_1 + b.v_1^2) + h$$

de donde

$$h = Z_1 - Z - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{4l_1}{d_1}(a.v_1 + b.v_1^2).$$

Puesto que estos dos valores de h expresan cada

presión en *O* que no puede ser más que una, nos igualarlos y se tendrá:

$$Z_0 - \frac{v_0^2}{2g} - \frac{4\,l_0}{d_0} \times (a.\,v_0 + b.\,v_0^2)$$

$$= Z_1 - \frac{v_1^2}{2g} - \frac{4\,l}{d_1} \times (a.\,v_1 + b.\,v_1^2)$$

e Z desaparece en los dos miembros. Esta ón puede escribirse

$$- Z_1 - \frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{4\,l_0}{d_0} \times (a.\,v_0 + b.\,v_0^2)$$

$$+ \frac{4\,l_1}{d_1} \times (a.\,v_1 + b.\,v_2) = o$$

os dos términos $\frac{v_1^2}{2g}$, $-\frac{v_0^2}{2g}$ son poco diferen- o de otro, se compensan casi exactamente y n suprimirse, quedando en definitiva

$$Z_0 - Z_1 - \frac{4\,l_0}{d_0} \times (a.\,v_0 + b.\,v_0^2)$$

$$+ \frac{4\,l_1}{d_1} \times (a.\,v_1 + b.\,v_1^2) = o$$

nando L la longitud total en la tubería, se

$$l_1 = L - l_0;$$

ra parte, las velocidades en los dos trozos se- nversamente proporcionales á las secciones,

y por consiguiente, á los cuadrados de los diámetros, para el mismo gasto, y en este caso, se tendría:

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{d_0^2}{d_1^2}$$

de donde

$$v_1 = v_0 \times \frac{d_0^2}{d_1^2}.$$

Si los gastos, en lugar de ser iguales, es decir, de estar en la relación uno, están en una relación cualquiera $\frac{1}{3}$ ó $\frac{1}{4}$, por ejemplo, la velocidad v_1 será solamente $\frac{1}{3}$ ó $\frac{1}{4}$ de la precedente, siendo entonces necesario multiplicar el valor de v_1 por la relación del gasto Q_1 al Q_0.

Designemos, de una manera general, esta relación por K, ó sea,

$$\frac{Q_1}{Q_0} = K.$$

y se tendrá,

$$v_1 = K \times v_0 \times \frac{d_0^2}{d_1^2}$$

ahora bien, como las relaciones K y $\frac{d_0^2}{d_1^2}$ son conocidas, se podrá establecer, para simplificar, que

$$V = K \times \frac{d_0^2}{d_1^2}$$

de donde, finalmente

$$v_1 = V \times v_0;$$

substituyendo l_1 y v_1 por los valores así determinados, en la relación precedente queda:

$$Z_0 - Z_1 - \frac{4\,l_0}{d_0} \times (a\,v_0 + b\,v_0^2)$$
$$+ 4 \times \frac{L - l_0}{d_1} \times V \times (a\,v_0 + b\,V\,v_0^2) = O.$$

Esta fórmula todavía contiene dos incógnitas, l_0 y v_0; pero el primer valor de h establecido al principio nos da, entre estas dos cantidades, una segunda relación, que podemos además simplificar despreciando el término $\frac{v_0^2}{2g}$, siempre relativamente pequeño, y la expresión se convierte en

$$\frac{4\,l_0}{d_0} \times (a\,v_0 + b\,v_0^2) = Z_0 - h - Z;$$

el valor de Z no se conoce; pero es fácil de determinar teniendo en cuenta que la pendiente P por metro de tubería es igual á la diferencia de los niveles y_0 é y_1 de sus extremos, dividida por la longitud total de la misma, ó sea:

$$P = \frac{y_0 - y_1}{L}.$$

La cota del punto O será, pues,

$$Z = y_0 - \frac{y_0 - y_1}{L} \times l_0 = y_0 - P \times l_0;$$

llevando este valor á la expresión precedente se tiene, haciendo operaciones y simplificando,

$$l_0 = \frac{d_0 \times (Z_0 - h - y_0)}{4\,(a.v_0 + b\,v_0^2) - P\,d_0} = \frac{M}{4\,(a\,v_0 + b\,v_0^2) - P\,d_0}$$

llamando para más sencillez M al numerador que es conocido.

Si se substituye en vez de l_0 este valor en la fórmula general, ésta ya no contiene más que la incógnita v_0 de la cual se podrá ya calcular el valor por aproximaciones sucesivas.

Por otra parte se ve que la substitución de este valor de l_0 daría lugar á una fórmula muy complicada y á un cálculo muy laborioso. Para facilitar las operaciones, empezaremos por despreciar el término $a\,v_0$ ante $b\,v_0^2$, lo que puede hacerse sin dificultad cuando la velocidad v_0 se aproxima á un metro, y sobre todo cuando excede á este valor (§ 9).

La fórmula simplificada será entonces:

$$Z_0 - Z_1 - \frac{4\,l_0}{d_0} \times b.\,v_0^2 - \frac{4\,l_0}{d_1} \times V^2 \times b\,.\,v_0^2 + \frac{4\,L}{d_1} \times V^2.\,b\,.\,v_0^2 = 0,$$

que puede ponerse bajo la forma

$$Z_0 - Z_1 - 4b.v_0^2 \times \left(\frac{1}{d_0} + \frac{V^2}{d_1}\right) \times l^0 + \frac{4\,L}{d_1} \times V^2.b.v_0^2 = 0.$$

Del mismo modo el valor de l_0 se simplifica y se convierte en

$$l_0 = \frac{M}{4\,b\,v_0^2 - P\,d_0}.$$

Podremos, pues, escribir así la fórmula general:

$$4\,b.v_0^2 \times \left(\frac{1}{d_0} + \frac{V^2}{d_1}\right) \times \frac{M}{4\,b\,v_0^2 - P\,d_0} = (Z_0 - Z_0) + \frac{4L}{d_1} \times V^2.b.v_0^2:$$

reduciendo al mismo denominador y haciendo pasar al segundo miembro todos los términos que no contienen v_0^2:

$$r_0^2 = \frac{(P.d_0 - 4b.v_0^2) \times d_0 \times [(Z_0 - Z_1) \times d_1 + 4L.V^2.b.v_0^2]}{4\,b\,M \times (d_1 + d_0.V^2)}$$

Esta fórmula está ya dispuesta para efectuar las operaciones por aproximaciones sucesivas; se dará en el segundo miembro un valor arbitrario á v_0, por ejemplo, la unidad y se calculará el valor de este segundo miembro, dando el resultado un primer valor aproximado de v_0^2; se tomará la raíz cuadrada y se substituirá de nuevo en el segundo miembro y así se seguirá hasta que el resultado sea suficientemente aproximado al último valor admitido para el cálculo del segundo miembro.

Como aplicación numérica admitiremos que la distancia L entre los dos depósitos es 5000 metros, y adoptaremos para las demás cantidades los valores:

$d_0 = 0{,}750$, $d_1 = 0{,}500$ m.
$Z_0 = 40{,}00$, $Z_1 = 35{,}00$ m.
$y_0 = 15{,}00$, $y_1 = 12{,}00$ m.

Supondremos, además, que la presión que hay que mantener en el punto O esté representada por la columna piezométrica de altura $h = 10$ metros, y por último, que la relación entre los gastos de los dos recipientes sea:

$$\frac{Q_1}{Q_0} = K = \frac{1}{2}$$

ó dicho de otro modo, que el primer tubo que sale del depósito A gasta un volumen de agua por segundo doble del dado por el segundo tubo que comunica con el depósito B (fig. 10).

Calcularemos en seguida el valor de V, que entra en la fórmula general, y tendremos:

$$V = K \times \frac{d_0^2}{d_1^2} = \frac{1}{2} \times \frac{0{,}750^2}{0{,}500^2} = 1{,}125$$

y del mismo modo:

$$P = \frac{y_0 - y_1}{L} = \frac{15 - 12}{5000} = 0{,}0006$$

y también:

$$M = d_0 \times (Z_0 - h - y_0) = 0{,}75 \times (40 - 10 - 15) = 11{,}25.$$

Tenemos así todos los elementos necesarios para calcular la fórmula general por aproximaciones sucesivas; hagamos primero $v_0 = 1$ en el segundo miembro de esta fórmula y se obtendrá:

$$v_0^2 = \frac{(P.d_0 - 4b) \times d_0 \times [(Z_0 - Z_1) \times d_1 + 4\,L.\,V.^2 b]}{4\,b.\,M \times (d_1 + d_0.V^2)}$$

substituyendo todos los términos por su valor, resulta:

$$v_0^2 = \frac{(0.0006 \times 0,75 - 4\,b) \times 0.75 \times (5 \times 0.50 + 4 \times 5000 \times 1,266 \times b)}{4 \times 11.25 \times (0,50 + 0,75 \times 1,266) \times b}$$

Substituiremos en vez de b el valor dado por Dupuit:

$$b = 0,0003855$$

y tendremos:

$$v_0^2 = \frac{0.00109 \times 0.75 \times 12.26}{45 \times 0.000559} = 0.3984$$

de donde:

$$v_0 = \sqrt{0.3984} = 0.63.$$

Encontramos, pues, un valor muy inferior al supuesto, y es evidente que si volvemos á llevar este valor de v_0, ó mejor el de v_0^2 en la fórmula, el resultado del cálculo será todavía inferior y no podríamos terminar. Es necesario, por lo tanto, dar á v_0 valores no inferiores, sino superiores á 1. Hagamos, pues, $v_0^2 = 2$, ó lo que es lo mismo, $v_0 = 1.41$, y se tendrá:

$$v_0^2 = \frac{(0.00045 - 8\,b) \times 1.75 \times (2.50 - 2000 \times 2 \times 1.266 \times b)}{1.8515} = 1.73$$

de donde

$$v_0 = \sqrt{1.73} = 1.31.$$

Este resultado, inferior al valor supuesto, pero relativamente próximo, nos demuestra que hay

que dar á v_0^2 un valor mayor, por ejemplo, $v_0^2 = 2{,}5$; volviendo á hacer los cálculos en estas condiciones, se encontrará un resultado muy próximo á este valor, y después de una ó dos nuevas operaciones se llegará á dos resultados sucesivos que no diferirán más que en una centésima y que se deberán adoptar como solución del cálculo. Así se obtiene el valor $v_0 = 1{,}57$ metros.

Para el valor de v_1 en el trozo de diámetro d_1, resulta, según la fórmula ya conocida,

$$v_1 = K \times v_0 \times \frac{d_0^2}{d_1^2} = \frac{1{,}57}{2} \times \frac{\overline{0{,}75}^2}{\overline{0{,}50}^2} = 1{,}77$$

deduciremos ahora los gastos de cada depósito; el del A será:

$$Q_0 = \frac{\pi \times d_0^2}{4} \times v_0 = 0{,}694 \text{ m}^3$$

y el de B:

$$Q_1 = \frac{\pi \times d_1^2}{4} \times v_1 = 0{,}347 \text{ m}^3$$

Gasto total en el punto O: 1,041 m³

Se obtiene, pues, para la relación de los dos gastos:

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{0{,}347}{0{,}694} = \frac{1}{2}$$

lo que verifica los resultados obtenidos.

Se puede ya determinar la posición del punto O, es decir, la longitud del trozo l_0, por ejemplo, por la fórmula establecida al empezar el estudio de este problema:

$$l_0 = \frac{M}{P.d_0 - 4(a.v_0 + b.v_0^2)} = 3363{,}90 \text{ m.}$$

Como comprobación se calculará l_1 por una fórmula semejante:

$$l_1 = \frac{M_1}{P\,d_1 - 4(a.v_1 + b.v_1^2)} = 1363{,}10 \text{ m.},$$

haciendo, como antes:

$$P = \frac{y_0 - y_1}{L} \text{ y } M_1 = d_1 \times (Z_1 - h - y_1).$$

Es de interés considerar algunos casos particulares para los cuales las fórmulas se simplifican considerablemente.

Supongamos primero que los diámetros d_0 y d_1 sean iguales, y se tendrá:

$$d_0 = d_1 \text{ y } \frac{Q_1}{Q_0} = K = 1$$

y para el valor de V que figura en la fórmula general:

$$V = K + \frac{d_0^2}{d_0^2} = 1 \text{ y } V^2 = 1$$

de donde resulta:

$$v_0^2 = \frac{(P.d_0 - 4b.v_0^2) \times [(Z_0 - Z_1) \times d_0 + 4L.b.v_0^2]}{8b.M.}$$

Esta ecuación se resuelve por aproximaciones sucesivas, como hemos dicho antes.

Supongamos, finalmente, que además de las hipótesis admitidas ya, los niveles del agua en los dos depósitos sean iguales y que la tubería sea horizontal, lo que se expresa diciendo que

$$Z_0 = Z_1 \text{ y } y_0 = y_1$$

lo que reduce á cero los valores de $Z_0 - Z_1$ y de $P = \frac{y_0 - y_1}{L}$.

La fórmula general se simplifica más aún, y queda:

$$v_0 = \frac{4\,b.v_0^2 \times 4\,L.b.v_0^2}{8\,b.\,M} = \frac{16.b.^2 L.\,v_0^4}{8\,b.\,M}$$

de donde se obtiene haciendo reducciones:

$$v_0 = \sqrt{\frac{M}{2\,b.L}}.$$

Hagamos una aplicación numérica de este caso, tomando:

$$L = 4000 \text{ m.}; \; d = d_1 = 0{,}50 \text{ m.}; \; h = 10 \text{ m.}$$
$$Z = Z_0 = Z_1 = 40 \text{ m. y } y_0 = y_1 = 10 \text{ m.}$$

llevando estos valores á la fórmula, se tendrá:

$$v_0 = \sqrt{\frac{10}{3{,}08}} = 1{,}80.$$

Este resultado es suficientemente aproximado

para la práctica corriente al valor exacto que sería 1,87; la diferencia proviene de que hemos despreciado, para simplificar, los términos $a \times v$.

Si se quisiera obtener un valor más exacto, se podrían volver á tomar las fórmulas citadas al principio, introduciendo en ellas las hipótesis admitidas en este último caso particular, sin despreciar los términos $a \times v$, y así se obtendría una fórmula más compleja que antes, pero que se podrá resolver fácilmente por aproximaciones sucesivas, partiendo del valor v_0 calculado por la fórmula simplificada.

Si admitimos para v_0 el valor 1,87 metros, encontraremos:

$$l_0 = l_1 = \frac{L}{2} = 2000 \text{ m.}$$

y

$$Q_0 + Q_1 = 2\,Q_0 = \frac{2\,\pi\,d_0^2}{4} \times v_0 = 0{,}735 \text{ m}^3,$$

ó sean 735 litros por segundo.

CAPÍTULO III

MOVIMIENTO DE LOS LÍQUIDOS EN LOS CANALES DESCUBIERTOS

16. Ley general del movimiento. Fórmula de Darcy.— Es frecuente, en vez de emplear tuberías de fundición ó de cemento, hormigón ú otro material cualquiera, en las que el agua circula á plena sección, conducir el agua, que por medio de una presa se toma de un río ó arroyo á la casa de máquinas ó á los campos que van á regarse, por medio de canales descubiertos construídos acomodándose á la topografía del terreno.

El agua circula en estos canales con una velocidad constante, bajo la acción de la gravedad, y si la velocidad de la caída no se acelera según las leyes de la gravitación, es que existen evidentemente fuerzas antagonistas que vienen, en cada instante, á anular el impulso de la gravedad equilibrando su acción.

En efecto, los filetes líquidos que se deslizan sobre las paredes del canal están sometidos, como en los tubos, á fuerzas de rozamiento que, por ejercerse en sentido contrario al del movimiento, tienden á retrasarlo y á compensar la aceleración que se produciría por consecuencia de la caída debida á la gravedad.

No son, además, los filetes líquidos que están en contacto con las paredes, los únicos que están so-

metidos á rozamientos, sino que por consecuencia de una especie de viscosidad que el líquido presenta, los demás ejercen, unos sobre otros, acciones recíprocas en mayor ó menor grado.

Como consecuencia de estas circunstancias, los filetes más próximos á las paredes del canal son los más retrasados, y este retraso va atenuándose cada vez más hasta llegar á los filetes más alejados que son los que están animados de mayor velocidad.

Si estos rozamientos no existiesen el líquido se movería con una velocidad uniforme en un canal horizontal en virtud de la altura de la capa líquida; por la existencia de estas fuerzas de rozamiento es necesario una altura de caída suplementaria, determinada por una cierta altura del canal que venga á sumar su efecto para mantener constante la velocidad de salida.

Se admite que existe una fuerza F por metro de longitud, que es precisamente la fuerza necesaria para que la corriente franquee la distancia de un metro considerada. La fuerza total para recorrer un canal de longitud L será, por lo tanto, $L \times F$.

Esta fuerza total debe equilibrar las fuerzas de rozamiento que tienden á oponerse al movimiento del líquido. Se debe admitir que esta fuerza es proporcional á la longitud del canal, al perímetro de la sección, y á una cierta función de la velocidad media. Las fuerzas de rozamiento se expresarán, pues, de una manera análoga á cuando tratábamos del movimiento en una tubería.

Estas fuerzas serán, por lo tanto, $L \times P\,(a_1 v + b_1 v^2)$ en la cual L representa la longitud del canal en metros, P el desarrollo del perímetro mojado, v la

velocidad media de los filetes líquidos; a_1 y b_1 coeficientes determinados por la experiencia.

Podremos, por lo tanto, escribir que la fuerza motriz que determina el movimiento del agua es igual á las fuerzas antagonistas debidas al rozamiento, y obtendremos así una relación semejante á la aplicada en las tuberías

$$F \times L = L \times P (a_1 v + b_1 v^2).$$

Siendo debida la fuerza á la pendiente del canal por metro de longitud, se puede considerar que las diversas zonas transversales se mueven en virtud de la presión hidrostática que se ejerce sobre ellas; esta presión se expresará en función del peso del líquido por la fórmula

$$F = S \times d \times i,$$

siendo S la sección transversal del canal limitada al perímetro mojado y á la superficie libre del líquido, d el peso específico, i la altura de la cual cae dicho líquido por metro de longitud ó la diferencia de nivel de dos secciones distantes un metro.

La ecuación de equilibrio puede expresarse bajo la forma

$$F = P \times (a_1 v + b_1 v^2),$$

dividiendo por $S \times d$ tendremos

$$\frac{F}{S \times d} = \frac{P}{S} \times \frac{a_1 v + b_1 v^2}{d}$$

siendo $\frac{F}{S \times d} = i$ en virtud de lo dicho anteriormente.

Podemos también escribir:

$$\frac{a_1 v \times b_1 v^2}{d} = a v + b v^2$$

haciendo $\frac{a_1}{d} = a$ y $\frac{b_1}{d} = b$.

Si asimilamos la sección á un rectángulo que tenga por base el desarrollo P del perímetro mojado y por altura una longitud R apropiada, tendremos:

$$S = P \times R \qquad R = \frac{S}{P}$$

determinando esta relación el valor de R, que se designa con el nombre de radio medio.

La ecuación de equilibrio quedará, por lo tanto, bajo la forma

$$i = \frac{P}{P \times R} \times (a v + b v^2)$$

ó

$$R \times i = a v + b v^2.$$

Esta es la fórmula que se emplea para resolver los diversos problemas relativos al movimiento del agua en los canales descubiertos.

Como la velocidad de los filetes líquidos varía en realidad de uno á otro, hay que con siderar como velocidad media la que resulta de la relación

$$V = \frac{Q}{S}.$$

En cuanto á los coeficientes a y b han sido determinados por Prony, y sus valores son los siguientes:

$$a = 0.000044$$
$$b = 0.000309$$

Evidentemente esta fórmula no puede dar resultados exactos en todos los casos, por tener coeficientes constantes, y puesto que no se tiene, además, en cuenta ni el perfil de la sección del canal ni la naturaleza de las paredes.

La fórmula de Darcy y Bazin tiene, por el contrario, en cuenta estos elementos, y se expresa bajo esta forma:

$$R \times i = b_1 \times v^2.$$

Veamos ahora cuáles son, según Vigreux, los diversos valores que debemos dar al factor b_1, según la naturaleza de las paredes:

Paredes de cemento ó madera cepillada ..... $0{,}00015 \times \left(1 + \frac{0{,}03}{R}\right)$

Paredes de sillería, ladrillos ó lajas ..... $0{,}00019 \times \left(1 + \frac{0{,}07}{R}\right)$

Paredes de mampostería ..... $0{,}00024 \times \left(1 + \frac{0{,}25}{R}\right)$

Paredes de tierra ..... $0{,}00028 \times \left(1 + \frac{1{,}25}{R}\right)$

Estas fórmulas no solamente tienen en cuenta la

naturaleza de las paredes, sino el desarrollo de estas paredes con relación á la sección.

La fórmula de Darcy y Bazin es la que emplearemos para resolver los diversos problemas que se refieren al movimiento del agua en canales descubiertos.

17. Aforo de canales y ríos. – El gasto de agua de un canal ó río depende evidentemente de dos elementos: la sección y la velocidad media.

Para obtener la sección se determinará el perfil transversal en los dos extremos y en el medio del canal ó río, se calculará las superficies de estas tres secciones y la media será la que se tome por sección verdadera.

La medida de la velocidad puede llevarse á cabo por tres medios distintos: *por flotadores,* por el *molino de Woltman* y por los *tubos de Pitot y de Darcy*

Los flotadores están formados por discos de madera de 0,05 metros de diámetro y de unos 0,005 de espesor; estos discos están lastrados por medio de un clavo clavado sobre la cara inferior del flotador, y de tal modo que la superficie de éste aflore sobre la superficie del agua.

Por medio de barcas se colocan varios flotadores en el eje de la corriente y un poco más arriba que la primera de las secciones de las tres que se tomaron para obtener la sección media; dos observadores provistos de relojes convenientemente comparados, están colocados junto á las dos secciones (superior é inferior), anotan el momento justo del paso de los flotadores por la sección observada, y se obtiene así el tiempo que han tarda-

do los flotadores en recorrer una longitud conocida del río ó canal.

El camino recorrido en un segundo será la velocidad, y para obtener la más aproximada á la verdadera tomaremos la media de las velocidades de los diferentes flotadores.

La cifra que así obtengamos no nos dará más que la velocidad del filete superficial en el eje de la corriente, velocidad que es evidentemente diferente á la de otros filetes líquidos y notablemente superior á la de los filetes próximos á las paredes del canal. Si designamos por v la velocidad en la superficie, se puede admitir que la velocidad media que debemos considerar es

$$V = 0{,}8\ v.$$

El gasto Q, á traves de la sección media S, será:

$$Q = 0{,}8\ v \times S.$$

El *molino de Woltman* consiste en una rueda de paletas inclinadas, montadas sobre un árbol horizontal. Supongamos que se coloca este molino en agua tranquila á cierta profundidad, y que se le arrastra, según un movimiento uniforme, siguiendo la dirección de su eje, la reacción del agua contra las paletas les imprimirá un movimiento de rotación alrededor de su eje y el número de vueltas será sensiblemente proporcional á la velocidad de traslación del aparato; este número de vueltas se registra por un minutero puesto en relación con el eje motor.

Podremos así determinar la velocidad de tras

ción correspondiente á cada vuelta del aparato, lo que constituye la tara del molino. Si ahora colocamos el aparato, manteniéndole inmóvil, en el río ó canal que queremos aforar, es evidente que la velocidad de rotación será proporcional á la velocidad del agua.

En la práctica, después de haber determinado el perfil transversal de una sección, se divide esta sección en diversas partes, de las cuales se determina el área, y en el centro de cada una de ellas se coloca sucesivamente el molino. Se hace el producto de cada una de estas superficies parciales por la velocidad correspondiente, y la suma nos dará el gasto de toda la sección.

El *tubo de Pitot* consiste en un tubo de vidrio encorvado en ángulo recto que se introduce verticalmente en el agua, teniendo cuidado de que la rama horizontal, colocada en la parte inferior, esté orientada en sentido contrario al de la marcha de la corriente.

El agua en su movimiento ejerce cierta presión sobre el orificio de la rama horizontal y determina en la rama vertical un ascenso del agua tanto más elevado cuanto la velocidad de la corriente es mayor. La altura de la columna líquida da, por decirlo así, la medida de la fuerza viva del agua, la cual es proporcional al cuadrado de la velocidad. Por lo tanto, si el agua se elevase una altura de 3 centímetros para una cierta velocidad, se elevaría 9 centímetros para una velocidad doble.

Este aparato debe tararse con sumo cuidado, marcando alturas correspondientes á diferentes velocidades ya conocidas.

En el tubo de Pitot la velocidad del agua ejerce

una cierta presión sobre la rama horizontal cuando se la coloca en sentido contrario al de la corriente; si la colocásemos en el mismo sentido que la corriente, se produciría, por el contrario, una cierta depresión delante del orificio, la cual haría descender el líquido en la rama vertical por debajo del nivel de las aguas del río ó canal.

Si combinamos dos tubos de Pitot, uno con su rama horizontal en el sentido de la corriente y el otro en sentido contrario, y si además unimos exteriormente las ramas verticales por un tubo horizontal, habremos formado el *tubo de Darcy;* una válvula colocada en el tubo horizontal de unión nos permitirá aspirar el aire y producir un cierto vacío por encima de las columnas líquidas en las dos ramas verticales.

El agua se elevará en un tubo y bajará en el otro, con relación al nivel de la superficie líquida; la diferencia de altura de las dos columnas, una vez tarado el instrumento, nos permitirá apreciar la velocidad de la corriente. Aspirando el aire por medio de la válvula del tubo de unión se podrá hacer que suban los niveles de las dos columnas á la parte de la escala que sea más cómoda la lectura, siendo evidente que con la aspiración no hemos alterado en lo más mínimo la diferencia de altura de las dos columnas, que es lo que nos da la velocidad.

Hemos admitido que la velocidad media de los filetes líquidos era próximamente 0,8 de la velocidad superficial en el eje de la corriente; esta relación es evidente que variará según los diferentes ríos.

Se admite generalmente que la velocidad med

s la media de las velocidades de los filetes en la
perficie y en el fondo, según el eje de la co-
riente.

Cuando se trata de canales, la forma y dimen-
ones de la sección transversal no tienen gran in-
uencia sobre la relación $\frac{V}{v}$. Numerosas expe-
encias hechas en canales de sección rectangular
de sección trapezoidal, construídos con paredes
e tierra y de mampostería, han demostrado que
diferentes profundidades la relación $\frac{V}{v}$ no va-
a más que de 0,80 á 0,85.

La velocidad de los filetes próximos al fondo y
las paredes es inferior á la velocidad media y en
roporción de 5 á 20 por 100, según la naturaleza
e las paredes.

Es indispensable, en la construcción de los ca-
ales, determinar su perfil transversal de manera
ue la velocidad en el fondo no pase de cierto lí-
ite compatible con la conservación de la obra.
sta velocidad límite depende evidentemente de
a naturaleza de las paredes.

Para tierras movedizas debe ser inferior 0,10 me-
ros; varía de 0,15 á 0,60 metros para arcillas, are-
as y piedras, y puede llegar á 1,20 y 1,50 metros
ara piedras aglomeradas y hasta á 3 metros para
ocas duras.

18. Problemas relativos á los canales descubiertos.—
iversos problemas pueden presentarse referentes
los canales descubiertos.

Estos problemas son:

1.° Determinar el gasto por segundo de un ca-

nal ya construído y del cual conocemos, por tanto, la forma, las dimensiones y la pendiente, que la supondremos constante en el recorrido considerado.

2.° Determinar la pendiente de un canal cuando se conoce su forma, dimensiones y gasto.

3.° Determinar la velocidad media conociendo los demás elementos.

Para resolver estos problemas, nos valdremos de la fórmula de Darcy (§ 16)

$$R \times i = b_1 \times v^2.$$

El cálculo del gasto relativo al primer problema se obtiene por la fórmula

$$Q = S \times v,$$

en la cual S es la sección transversal del canal y v la velocidad deducida de la fórmula de Darcy, que puede ponerse bajo la forma

$$v^2 = \frac{R \times i}{b_1}.$$

Supongamos ahora un canal de sección rectangular, de anchura l y de altura de agua h, se tendrá para el perímetro mojado (fig. 11)

$$P = l + 2h.$$

Para la sección:

$$S = l \times h.$$

De donde

$$R = \frac{S}{P} = \frac{l \times h}{l + 2\,h}.$$

Sea, por ejemplo:

$$l = 1 \text{ m.}; \; h = 0{,}50 \text{ m.}; \; i = 0{,}001 \text{ m.}$$

resultará:

$$R = \frac{1 \times 0{,}50}{1 + 2 \times 0{,}50} = 0{,}25; \; S = 0{,}50.$$

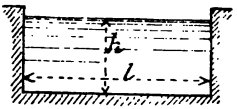


Fig. 11.—Canal rectangular.

El valor de b_1 lo sacaremos del cuadro dado precedentemente de los coeficientes de Darcy, para un canal de madera, por ejemplo:

$$b_1 = 0{,}00015 \left(1 + \frac{0{,}03}{0{,}50}\right) = 0{,}000159.$$

de donde

$$v^2 = \frac{0{,}25 \times 0{,}001}{0{,}000159} = 1{,}5724$$

y

$$v = \sqrt{1{,}5724} = 1{,}25 \text{ m.}$$

Obtendremos, pues, para el gasto:

$$Q = S \times V = 0{,}50 \times 1{,}25 = 0{,}625 \text{ m.}$$

Consideremos ahora el caso en que la sección del cañal es un trapecio simétrico, cuyos lados forman un ángulo de 45 grados con la horizontal (figura 12).

Tendremos:

$$d\,k = l + 2\,h;\ S = (l + h) \times h,$$

aplicando la regla que da la superficie del trapecio.

Fig. 12.—Canal trapezoidal.

Tendremos también que:

$$P = l + 2\,b\,k = l + h\sqrt{2}$$

puesto que $b\,k$ es la hipotenusa del triángulo $b\,c\,k$.

Si en lugar de formar los lados un ángulo de 45°, como hemos supuesto, formasen un ángulo cualquiera correspondiente á una cierta pendiente p, $b\,m$ sería entonces evidentemente igual á la altura dividida por la pendiente, y tendríamos:

$$d_1 k_1 = l + \frac{2h}{p}.$$

El segundo problema corresponde al caso en que se conoce el gasto y la sección transversal; para calcular la pendiente que se busca, es necesario poner la fórmula de Darcy bajo la forma

$$i = \frac{b_1 \times v^2}{R};$$

supongamos que el canal de sección rectangular antes considerado, deba tener un gasto de un metro cúbico por segundo y se deducirá la velocidad

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{1}{0{,}5} = 2 \text{ m.}$$

de donde

$$i = \frac{0{,}000159 \times 4}{0.25} = 0{,}0025.$$

En el tercer problema se trata de calcular la velocidad, y para ello se utilizará la fórmula

$$v^2 = \frac{R \times i}{b_1}.$$

Para una pendiente i de 0,0025 por metro, se tendrá, siempre en el mismo caso de un canal de sección rectangular:

$$v^2 = \frac{0{,}25 \times 0{,}0025}{0{,}000159} = 4$$

y el gasto

$$Q = S \times v = 0{,}5 \times 2 = 1 \text{ m}^3.$$

Si en lugar de un canal con sección regular se trata de un río, cuyo lecho presenta grandes diferencias de profundidad en los diversos puntos de la sección transversal, no se puede calcular exactamente el área de esta sección. Se divide la anchura en partes iguales y se levantan en los puntos de división verticales hasta el nivel del agua, quedando así dividida la sección en trapecios, cuya área es fácil de calcular, lo mismo que el perímetro mojado.

Cuando la profundidad de la corriente es muy pequeña con relación á su anchura, se puede tomar, sin error sensible, la distancia entre las orillas por perímetro mojado, simplificándose, por consecuencia, las fórmulas.

Los problemas considerados se refieren á canales establecidos, siendo evidente que las mismas fórmulas permiten determinar las secciones y pendientes de los canales destinados á suministrar un cierto gasto, con una pendiente y una velocidad adecuadas. Los cálculos se harían del mismo modo, tomando por incógnitas S, i ó v, según cuales fueran los datos. Una vez conocida S se deducirán las dimensiones de la sección transversal del canal, según la forma que se haya impuesto.

19. Leyes del movimiento variado.—Resalto superficial.—Hemos admitido, hasta aquí, que el movimiento del agua en el canal era uniforme, lo que no puede suceder más que cuando la sección transversal del canal es la misma en todos los puntos de su recorrido y cuando la pendiente de su fondo es también invariable.

Pero no siempre sucede esto, y se concibe fácilmente que la velocidad del agua variará de una sección á otra, aumentando, si la sección del canal disminuye, y decreciendo en el caso contrario.

En el caso del movimiento uniforme la superficie del agua es paralela al fondo del cauce, pero no sucede lo mismo en el caso que nos ocupa; el nivel del agua puede variar de una sección á otra, sea elevándose ó descendiendo cuando varíen la sección transversal y la pendiente.

Como consecuencia de las variaciones de secciones y de pendientes del lecho, en puntos consecutivos del recorrido del canal, la diferencia de los niveles en dos secciones transversales próximas no es ya la que resultaría de la pendiente del cauce entre estas dos secciones y puede ser más pequeña ó mayor, según las circunstancias.

Hay, por lo tanto, que considerar en la práctica, en este caso del movimiento variado, dos pendientes en la proximidad de cada sección, que son la del lecho y la del nivel del agua, siendo ambas susceptibles de diferenciarse notablemente, pudiendo la primera, según los casos, ser mayor ó menor que la segunda.

Consideraremos, en particular, el caso más sencillo de un cauce de sección rectangular, cuya anchura sea grande comparada con la profundidad de la corriente.

En este caso el perímetro mojado se reduce en la práctica á la anchura l del canal, y se tiene para la sección y el gasto en el punto considerado:

$$S = l \times h; \quad Q = V \times l \times h$$

de donde

$$v = \frac{Q}{l \,.\, h} = \frac{q}{h},$$

designando por q el cociente $\frac{Q}{l}$, es decir, el gasto por segundo y por metro de anchura ó gasto específico.

Llamemos, como siempre, i la pendiente del canal, y como suponemos que esta pendiente es variable de un punto á otro del recorrido, representaremos por i la pendiente entre dos puntos próximos á la sección considerada, situados uno antes y otro después de esta sección (fig. 13).

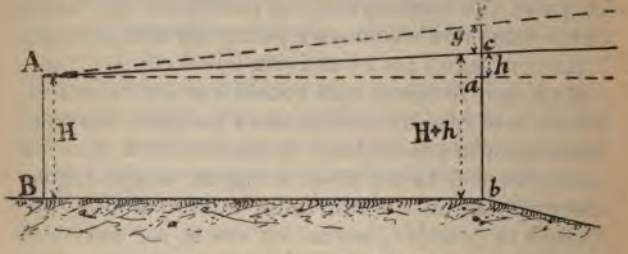


Fig. 13.—Pendiente del nivel del agua.

Sea h el aumento muy pequeño del nivel del agua cuando pasa de un punto á otro muy próximo, situado á la distancia d del primero; el cociente $\frac{h}{d}$ representará el aumento del nivel del agua por unidad de longitud en esta sección, y por consiguiente, la pendiente de nivel con relación al fondo del lecho sobre el cual se cuentan las alturas del agua.

En virtud de lo que hemos dicho antes, es evidente que esta pendiente del nivel del agua depende de la pendiente i del lecho en la región Bb considerada, dependiendo también de la altura total H en el punto de origen, y por último, del gasto específico q; en efecto, si se halla la expresión de esta pendiente, resulta:

$$\frac{h}{d} = \frac{i - \frac{b_1 \times q^2}{H^3}}{1 - \frac{q^2}{g \times H^3}}$$

En esta fórmula g representa, como siempre, la aceleración debida á la gravedad, ó sea 9,81 metros por segundo.

Se puede preguntar qué condiciones son necesarias para que h se anule, es decir, para que al pasar de un punto del recorrido á otro muy próximo, la profundidad del agua no aumente, y por consecuencia, para que el nivel sea paralelo al lecho del canal.

Consideremos para ello la fórmula anterior que puede evidentemente escribirse bajo la forma:

$$h = \frac{i - \frac{b_1 \times q^2}{H^3}}{1 - \frac{q^2}{g \times H^3}} \times d$$

ahora bien; para que h, que es un producto, se anule, es necesario que sea cero uno de los factores, de modo que la condición buscada será:

$$i - \frac{b_1 \times q^2}{H^5} = O \quad \text{ó} \quad i \times H^5 = b_1 \times q^2$$

de donde

$$H^5 = \frac{b_1 \times q^2}{i}.$$

Por lo tanto, para este valor particular de H correspondiente al gasto q y á la pendiente i del lecho en la sección considerada, la sobrelevación del agua en un punto próximo y anterior á la sección sería nula, ó lo que es lo mismo, la superficie de la corriente sería paralela al fondo, y el movimiento, en esta región, sería uniforme.

Se puede, inversamente, considerar el caso en que la distancia d fuese nula para una sobrelevación cualquiera h, hecho que corresponde al fenómeno que se designa con el nombre de *resalto superficial;* si, en efecto, se produce una brusca sobrelevación, en un punto dado, la pendiente, por decirlo así, se hace infinita, es decir, que el agua se eleva verticalmente en el punto considerado, de donde viene el nombre de resalto que se da á este fenómeno.

La fórmula nos indica también las condiciones de este resalto, puesto que puede escribirse así:

$$d = \frac{1 - \dfrac{q^2}{g \times H^3}}{i - \dfrac{b_1 \times q^2}{H^5}} \times h$$

y d será nulo si se tiene:

$$1 - \frac{q^2}{g \times H^3} = O \text{ ó } g \times H^3 = q^2$$

de donde

$$H^3 = \frac{q^2}{g}.$$

Consideremos un ejemplo numérico. Sea $H^3 = 1$ metro, de donde $H = 1$ metro también y será necesario que se tenga

$$\frac{q^2}{g} = 1, \text{ de donde } q^2 = 9{,}81$$

ó sea $q = 3{,}130$ m³ próximamente por metro de longitud de la sección considerada, para que se produzca en este punto un resalto superficial.

Para distinguir estos dos valores especiales de H, designemos el primero por H_1 y el segundo por H_2 y pongamos, por lo tanto,

$$H_1^3 = \frac{b_1 \times q^2}{i} \quad \text{y} \quad H_2^3 = \frac{q^2}{g}.$$

Estas dos alturas difieren entre sí en

$$H_1^3 - H_2^3 = q^2 \times \left(\frac{b_1}{i} - \frac{1}{g}\right) = \frac{q^2}{i} \times \left(b_1 - \frac{i}{g}\right).$$

Si de los valores de H_1 y H_2 resulta que la diferencia $H_1^3 - H_2^3$, ó lo que es lo mismo, que la diferencia $H_1 - H_2$ es positiva, esto quiere decir que H_1 es mayor que H_2 é inversamente, si es negativa la diferencia.

Como, por otra parte, esta diferencia depende del valor de $b_1 - \frac{i}{g}$, basta ver cuál es el signo de esta última resta, ó si b es mayor ó menor que $\frac{i}{g}$.

Ahora bien, adoptando para b_1 el valor 0,0004 indicado por Tadini, y teniendo presente que si, por ejemplo, b_1 es mayor que $\frac{i}{g}$, se tiene evidentemente que $b_1 \times g$ es mayor que i y substituyendo valores

$$0{,}0004 \times 9{,}81 = 0{,}0039 \text{ mayor que } i$$

ó i menor que 0,004 en números redondos.

Así, por ejemplo, para los cursos de agua de débil pendiente, es decir, no torrenciales, se tendrá que H_1 será mayor que H_2, ó sea que la altura de agua para la cual el movimiento es uniforme en un recorrido determinado, es superior á la que da lugar al resalto superficial: si se trata, por el contrario, de torrentes para los cuales i es superior á 0,004, la altura de agua correspondiente al resalto superficial es mayor que la que determina el movimiento uniforme.

20. Determinación del perfil longitudinal de la superficie de la corriente.—Hemos examinado el caso particular de desniveles, por decirlo así, instantáneos producidos en una capa transversal de muy poco espesor, es decir, entre dos secciones infinitamente próximas.

El problema que más generalmente se presenta, consiste en determinar el desnivel que existe entre dos secciones que limitan un recorrido determi-

do y más ó menos largo de un río ó de una corriente de agua cualquiera.

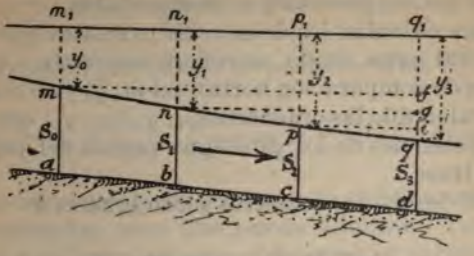


Fig. 14.—Perfil longitudinal del nivel del agua.

Se quiere conocer, por ejemplo, la diferencia del nivel del agua en dos secciones $m\,a$ y $q\,d$, el cual está representado en la figura 14 por $q\,f$.

Como se trata, en el caso que nos ocupa, de un curso de agua irregular cuyas secciones transversales y cuya pendiente varían constantemente de un punto á otro, los cálculos que sirven para determinar el desnivel no pueden aplicarse al recorrido total y es absolutamente necesario limitar la aplicación al intervalo comprendido entre dos secciones suficientemente aproximadas para que puedan considerarse las secciones y las pendientes del cauce como aproximadamente constantes en este intervalo.

Para esto se divide el recorrido considerado en un cierto número de trozos por secciones tales como $n\,b$ $p\,c$, etc., determinándose los desniveles respectivos de dos en dos, y así se llega poco á poco á obtener el desnivel total $q\,f$, porque es evidente que es igual á la suma de los desniveles parciales entre cada dos secciones transversales.

De esta manera se consigue llegar á determinar el perfil longitudinal $m\,n\,p\,q$ del curso del agua entre las dos secciones extremas dadas.

Para calcular los desniveles parciales que dan el perfil antes citado, se refiere este último á una línea de comparación horizontal $m_1\,q_1$ y se buscan los valores de las ordenadas y_0, y_1, y_2, y_3, que dan las distancias de los diferentes puntos del perfil á esta línea.

Los desniveles sucesivos serán iguales á

$$y_1 - y_0,\ y_2 - y_1,\ y_3 - y_2:$$

y se tendrá también

$$q\,f = y_3 - y_0.$$

Consideremos, en particular, el desnivel parcial

$$q\,i = y_3 - y_2;$$

este desnivel representa la caída necesaria para que la velocidad del agua pase del valor v_2 al valor v_3, que toma sucesivamente en las secciones S_2 y S_3; representa también la caída empleada en vencer la resistencia debida al frotamiento contra las paredes del cauce en el recorrido $c\,d$.

Se podrá, por lo tanto, escribir

$$y_3 - y_2 = \frac{v_3^2}{2\,g} - \frac{v_2^2}{2\,g} + \frac{P}{S} \times b_1 . v^2 . d$$

fórmula en la cual P representa el perímetro mojado de una sección media S, y d la distancia entre las dos secciones consideradas.

Como se tiene que

$$v_2 = \frac{Q}{S_2}; \; v_3 = \frac{Q}{S_3}; \; v = \frac{Q}{S}$$

la expresión precedente se podrá escribir

$$y_3 - y_2 = \frac{Q_2}{2g} \times \left(\frac{1}{S_3^2} - \frac{1}{S_2^2} \right) + Q^2 . \frac{P}{S^3} . b_1 . d .$$

Las secciones $p\,c$ y $q\,d$ están lo suficientemente aproximadas para que pueda admitirse que las secciones intermedias en el intervalo d varían casi uniformemente desde c hasta d y que sucede lo mismo que si el cauce tuviera una sección uniforme S en todo el recorrido, que fuera igual á la media de las dos secciones extremas: se tendrá, por lo tanto,

$$\frac{P}{S^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_2}{S_2^3} + \frac{P_3}{S_3^3} \right).$$

Del mismo modo, el valor de b que, según Darcy, depende del radio medio y por consecuencia del perímetro mojado y de la sección, será el valor medio de los coeficientes b_2 y b_3 relativos á las dos secciones consideradas, ó sea:

$$b_1 = \frac{1}{2} (b_2 + b_3).$$

Substituyendo ahora $\frac{P}{S^3}$ por su valor, en la expresión anterior resulta:

$$y_3 - y_2 = \frac{Q^2}{2g} \times \left(\frac{1}{S_3^2} - \frac{1}{S_2^2} \right) + \frac{Q^2 + b_1}{2} \times \left(\frac{P_2}{S_2^3} + \frac{P_3}{S_3^3} \right) \times d$$

fórmula en la que se debe dar á b_1 el valor que hemos indicado.

En este problema se conoce el gasto Q que se puede determinar generalmente por aforo directo; se conocen también el perfil longitudinal y los perfiles transversales en los puntos de división $abcd$, y se da, por último, la profundidad de la corriente en una de las secciones extremas, am por ejemplo: se trata, con estos datos, de calcular y_3 á fin de obtener la diferencia de cotas de la superficie del agua entre las dos secciones extremas del recorrido considerado.

Este problema se presenta principalmente cuando se trata de construir una presa para crear un salto de agua en qd por ejemplo. Esta presa produce por efecto el remanso del agua á una cierta distancia aguas arriba: es necesario imponerse la condición de que este remanso no vaya más allá de la sección ma para no perjudicar á la fábrica que está delante, ó dicho de otro modo, es necesario que la cota y_0 de la sección citada no cambie después de la construcción de la presa. Esta cota es, pues, conocida y debe conservar un valor invariable que figurará numéricamene en la fórmula.

Por lo tanto, se empezarán los cálculos por el par de secciones ma y nb y se escribirá:

$$y_1 - y_0 = \frac{Q^2}{2g} \times \left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_0^2} \right) + \frac{Q^2 \times b_1}{2} \times \left(\frac{P_0}{S_0^3} + \frac{P_1}{S_1^3} \right) \times d$$

El valor de y_1 se obtiene fácilmente de esta expresión, puesto que todas las demás cantidades P_1, S_1 y b_1 serían conocidas si se pudiese levantar el perfil nb; pero este perfil quedará necesaria-

mente modificado después de la construcción de la presa, y es necesario, por lo tanto, proceder por aproximaciones sucesivas.

Para ello se admite provisionalmente que $y_1 = y_0$ hipótesis que reduce á cero el primer miembro, y se tiene entonces

$$\frac{Q^2}{2} \times \left(\frac{1}{g.S_1^2} + \frac{b_1.P_1}{S_1^3} \times d\right) = \frac{Q^2}{2} \times \left(\frac{1}{g.S_0^2} - \frac{b_1.P_0}{S_0^3} \times d\right);$$

sea K el valor numérico del paréntesis del segundo miembro; simplificando quedará:

$$\frac{1}{g.S_1^2} + \frac{b_1.P_1}{S_1^3} \times d = K.$$

Se admitirán primeramente para b_1 y P_1 los valores correspondientes á la sección S_0, de manera que se conocerá la expresión

$$K_1 = b_1.\ P_1 \times d.$$

La fórmula precedente se convertirá entonces en

$$\frac{1}{g\ .\ S_1^2} + \frac{K_1}{S_1^3} = K.$$

Reduciendo al mismo denominador y simplificando, se tiene:

$$K\ .\ g\ .\ S_1^5 = S_1 + K_1\ .\ g.$$

que puede escribirse

$$S_1^2 = \frac{1}{K \cdot g} + \frac{K_1}{K \cdot S_1}.$$

Se dará primero á S_1 el valor de S_0 en el segundo miembro, y se deducirá por el cálculo un primer valor de S_1:

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{K \cdot g} + \frac{K_1}{K \cdot S_1}}.$$

Después se volverá á empezar el cálculo llevando este valor de S_1 al segundo miembro, determinando así un nuevo valor más aproximado de S_1 por la misma fórmula, llegando por último, después de varias operaciones análogas á dos valores de S_1 que no difieran sensiblemente, aceptándose el último valor encontrado.

Se llevará este valor á la fórmula principal en $(y_1 - y_0)$, lo cual permitirá calcular esta diferencia, y por consiguiente, el valor de y_1.

Este valor aproximado de y_1 sirve para hallar P_1 por las fórmulas

$$S_1 = l \times y_1 ; l = \frac{S_1}{y_1}$$

y

$$P_1 = l + 2y_1.$$

Se vuelven á comenzar entonces todos los cálculos precedentes para establecer un nuevo valor de S_1 calculado con este valor de P_1. El resultado se lleva de nuevo á la fórmula principal, de la cual se deduce un segundo valor más aproximado de $y_1 - y_0$ y de y_1 y así sucesivamente hasta que se llega á dos resultados sucesivos concordantes.

Al mismo tiempo que se hallan los valores de P_1 correspondientes á los de S_1, se pueden también llevar á las fórmulas los valores que resulten para b_1, teniendo siempre presente que b_1 debe ser la media aritmética de los valores correspondientes á las secciones de S_0 y S_1.

De la misma manera se procede para los intervalos siguientes, y la última ecuación en $(y_3 - y_2)$ que hemos establecido antes, dará el valor de y_3, es decir, la cota á la cual debe establecerse la coronación de la presa para que no se produzca en $m\,a$ ninguna sobrelevación del nivel, ni remolinos perjudiciales á la fábrica colocada aguas arriba de lo que se trata de crear.

21. Desniveles producidos por las presas sumergidas. Hemos estudiado los fenómenos que se producen como consecuencia del movimiento del agua en los canales de perfil y pendientes irregulares, pero admitiendo, sin embargo, que estas variaciones se producían progresivamente y de una manera casi insensible de un punto á otro del recorrido.

No obstante, pueden presentarse variaciones bruscas como la aproximación ó alejamiento rápido de las orillas, en uno ó varios puntos de la corriente, ó también una depresión repentina ó una elevación acentuada del cauce: además de las causas naturales, puede haber otras artificiales, como la construcción de una presa sumergida ó la construcción de los pilares de un puente que producen necesariamente como efecto la elevación del fondo del cauce ó el estrechamiento de la sección transversal de la corriente.

La disminución brusca de la sección del cauce

produce contracciones seguidas de un ensanchamiento que da lugar á torbellinos que son causa de pérdidas de carga y de trabajo más ó menos considerables: lo mismo sucede con el ensanchamiento brusco de la sección de la corriente.

La teoría anterior no podría evidentemente aplicarse á corrientes de agua que presenten variaciones bruscas de sección y de pendiente, por ser demasiado irregulares para poderse someter á las investigaciones del cálculo, pero el estudio del caso particular de una presa sumergida ó de la existencia de las pilas de un puente, no ofrece dificultad alguna.

Examinemos primero la influencia de una presa sumergida, sobre el régimen de la corriente del agua, antes y después de la presa.

Se dice que una presa está sumergida cuando el nivel del agua después de la presa es más alto que la coronación de la presa. Se supone que la coronación tiene la anchura suficiente para que pue-

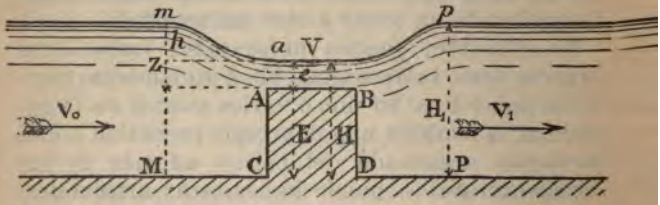


Fig. 15.—Presa sumergida.

dan considerarse como paralelos los filetes líquidos de un espesor e, pudiendo asimilar este caso al del vertedero que hemos estudiado anteriormente (§ 7).

Hemos visto entonces que á partir de una cierta sección *M* aguas arriba de la presa, el nivel del agua baja de tal manera, que determina sobre la coronación un espesor tal, que el nivel superficial en este punto es inferior al que existe aguas arriba de la presa (fig. 15).

En estas condiciones, si llamamos *V* á la velocidad de los filetes líquidos por encima de la presa, *h* á la diferencia $(Z - e)$ que da la altura del nivel aguas arriba, por encima de la superficie del líquido encima de la presa y *z* la altura de caída suplementaria debida á la velocidad V_0 del agua en la sección *m M*, tendremos la relación ya conocida

$$V = \sqrt{2g \times (h + z)}.$$

Como, según lo que acaba de decirse, se puede escribir que

$$h = Z - e\,;\; z = \frac{V_0^2}{2g},$$

resultará que el valor de *V* se podrá poner, substituyendo los valores de *h* y *z*, en la forma siguiente:

$$V = \sqrt{2g \times \left(Z + \frac{V_0^2}{2g} - e\right)}.$$

Después de la presa el volumen del agua se aumenta, por decirlo así, y el nivel vuelve á elevarse en la sección *p P*, á partir de la cual se puede admitir que los filetes líquidos vuelven á ser paralelos.

Para darnos cuenta de todas las circunstancias que acompañan á este fenómeno análogo al resalto superficial estudiado antes, seguiremos el mismo método de que hemos hecho uso para el estudio de la pérdida de carga debida al ensanchamiento brusco de una tubería (§ 8).

Se trata, por consiguiente, de aplicar el principio del crecimiento de la cantidad de movimiento á la masa de agua comprendida entre las secciones $a\,A$ y $p\,P$.

La masa que atraviesa la sección $A\,a$ está animada de una cantidad de movimiento por segundo igual á

$$\frac{q \times d}{g} \times V = \frac{e \times l \times V \times d}{g} \times V = \frac{e \times l \times d \times V^2}{g}$$

llamando l á la longitud de la presa.

Cuando esta masa llegue á la sección $p\,P$, habrá adquirido una nueva cantidad de movimiento que tendrá por expresión

$$\frac{H_1 \times l \times V_1 \times d}{g} \times V_1 = \frac{H_1 \times l \times d \times V_1^2}{g}.$$

El crecimiento de la cantidad de movimiento de la masa líquida al pasar de la sección $a\,A$ á la sección de aguas abajo será, pues,

$$\frac{H_1 \times l \times d \times V_1^2}{g} - \frac{e \times l \times d \times V^2}{g}.$$

Como el movimiento es horizontal, es debido exclusivamente á las fuerzas que actúen en esta di-

rección, es decir, á los impulsos de las presiones hidrostáticas que se ejercen sobre los centros de gravedad, ó sea á la semialtura de las dos secciones extremas consideradas.

La presión en el centro de $a\ C$ se ejerce de izquierda á derecha en el sentido del movimiento, y es igual á

$$d \times H \times l \times \frac{H}{2} = \frac{d \times l \times H^2}{2}.$$

La que se ejerce sobre el centro de $p\ P$ tiene por expresión

$$d \times H_1 \times l \times \frac{H_1}{2} = \frac{d \times l \times H_1^2}{2}.$$

Como estas dos presiones se ejercen en sentido contrario, el efecto resultante será igual á la diferencia

$$\frac{d \times l \times H^2}{2} - \frac{d \times l \times H_1^2}{2}.$$

No queda ya más que escribir que el crecimiento de las cantidades de movimiento es igual á la resultante anterior de las acciones de las fuerzas que actúan, y se tendrá la relación

$$\frac{e \times V^2}{g} - \frac{H_1 \times V_1^2}{g} = \frac{1}{2}(H_1^2 - H^2)$$

que se obtiene suprimiendo factores comunes, simplificando y cambiando los signos.

Como el gasto es evidentemente el mismo en todas las secciones, se tiene suprimiendo l, que

$$e \times V = H_1 \times V_1$$

expresión que puede también escribirse así:

$$V_1 = \frac{e}{H_1} \times V.$$

Si substituímos este valor de V_1 en la expresión precedente resulta, haciendo reducciones,

$$\frac{2e \times V^2}{g} \times \left(1 - \frac{e}{H_1}\right) = H_1^2 - H^2.$$

De esta expresión se sacan los valores de H_1 y de la contrapendiente $H_1 - H$, cuando se conocen las cantidades V, e, Z y H.

Si, por el contrario, es conocido H_1, se calculan estas cantidades por medio de esta misma relación y de la que se ha deducido al principio de este estudio, la cual puede ponerse bajo la forma

$$\frac{V^2}{2g} = Z + \frac{V_0^2}{2g} - e$$

utilizándose también las igualdades

$$H = E + e \quad \text{y} \quad q = e \times V$$

llamando q al gasto por segundo y por metro de longitud de la presa.

El valor de e es generalmente menor que $\frac{H_1}{2}$: en estas condiciones se verá que la contrapendiente $H_1 - H$ es menor que la diferencia de las alturas generatrices de las velocidades V y V_1 ó sea que la cantidad $\frac{V^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}$.

Esta diferencia no se emplea, por lo tanto, solamente en elevar el nivel en p, sino que en parte es absorbida por las pérdidas de trabajo debidas á los remolinos y torbellinos ocasionados por el resalto superficial.

Añadamos aún que el valor de H_1 puede, en realidad, ser mayor ó menor que el que resulta de la relación establecida anteriormente porque depende también de las circunstancias que mantienen el nivel del agua después de pasar la presa, en cada caso particular.

22. Remolinos producidos por las pilas de un puente. Fórmula de d'Aubuisson. La construcción de un puente sobre un río produce necesariamente como resultado la disminución de la sección del cauce, por la cimentación de las pilas sobre el lecho del río. Aguas arriba la sección es la del río, después se estrecha bajo los arcos del puente y luego se ensancha bruscamente á la salida.

Los remolinos que se producen aguas abajo del puente, no producen un aumento sensible del nivel y se puede admitir que la contrapendiente es despreciable: estos remolinos quedarán á una distancia más ó menos grande del puente según que el río esté en el estiaje ó en un momento de crecida; de cualquier modo que sea, el régimen normal y el movimiento del agua en filetes paralelos se restablece siempre á una cierta distancia aguas abajo del puente.

Es indudable que la velocidad del agua bajo el puente será mayor que aguas arriba, puesto que la sección que se ofrece al paso del líquido, es menor. Por otra parte, las pilas y los estribos impri-

men á los filetes líquidos una dirección oblícua hacia el eje del arco, y esta circunstancia tiende á reducir aún más la sección efectiva del paso del agua bajo el puente.

Llamemos h la profundidad del agua en la cara posterior del puente y h_1 la profundidad en la cara anterior ó de aguas arriba; sea l la luz del arco, L la anchura del río, antes y después del puente, y finalmente llamemos d á la anchura de la obra.

La velocidad media del agua bajo el puente en la sección de altura h, resultará del gasto

$$Q = l \times h \times v$$

de donde se saca

$$v = \frac{Q}{l \times h}.$$

Los rozamientos contra las paredes del perímetro mojado de la obra, producen una pérdida de carga en el recorrido d por debajo del arco; ésta tiene por expresión como hemos visto antes (§ 9);

$$\text{Pérdida de carga} = d \times \frac{\text{perímetro}}{\text{sección}} \times b_1 \times v^2$$

y substituyendo por las letras convenidas:

$$\text{Pérdida de carga} = d \times \frac{l + 2h}{l \times h} \times b_1 \times v^2.$$

Ahora bien, esta pérdida de carga corresponde á una disminución de altura que es igual á la diferencia de las profundidades $(h_1 - h)$ y se puede escribir

$$h_1 - h = d \times \frac{l + 2h}{l \times h} \times b_1 \times v^2.$$

Esta relación permite calcular el valor de esta diferencia de alturas y por consiguiente de la profundidad aguas arriba h_1, puesto que h es conocida.

Esta diferencia de alturas es la que se necesita para vencer la resistencia de rozamiento al atravesar el puente, pero debe producirse una caída superficial complementaria para que la velocidad pueda tomar el crecimiento deseado, en la sección contraída de la obra.

Si llamamos v_0 la velocidad de los filetes líquidos á una distancia suficiente para que su movimiento no esté influído por la proximidad de las pilas y de los estribos, y v_1 á la velocidad en la sección de contracción máxima bajo el puente, el desnivel ó la pendiente del nivel del agua en las dos secciones que corresponden á las velocidades v_0 y v_1 estará expresada por la relación

$$Z = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}.$$

Sean S_0 y S_1 las secciones del cauce, aguas arriba y en la zona de la corriente contraída bajo el arco, llamando Q al gasto, se tendrá:

$$Q = S_0 \times v_0 = S_1 \times v_1$$

de donde se saca

$$v_0 = \frac{Q}{S_0} \quad \text{y} \quad v_1 = \frac{Q}{S_1}$$

Llevando estos valores á la expresión precedente, resulta:

$$Z = \frac{Q^2}{2g \times S_1^2} - \frac{Q^2}{2g \times S_0^2} = \frac{Q^2}{2g} \times \left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_0^2}\right)$$

$$S_1 = K \times l \times h_1.$$

La sección S_0 es la del cauce aguas arriba: su anchura es L por hipótesis y su altura es h_1 aumentada en la caída Z anterior: su valor será, por lo tanto:

$$S_0 = L \times (h_1 + Z).$$

Substituyendo S_0 y S_1 por sus valores en la expresión que da el de Z, resulta:

$$Z = \frac{Q^2}{2g} \times \left(\frac{1}{K^2 \times l^2 \times h_1^2} - \frac{1}{L^2 \times (h_1 + Z)^2} \right).$$

Pero la diferencia de profundidades aguas arriba y aguas abajo, como sólo se debe á la pérdida de carga por rozamiento contra las paredes de la obra, es siempre muy pequeña y h_1 puede ser substituída sin error sensible por h, es decir, por la profundidad de la corriente aguas arriba del puente, y la relación anterior queda, por último, bajo la forma

$$Z = \frac{Q^2}{2g} \times \left(\frac{1}{K^2 \times l^2 \times h^2} - \frac{1}{L^2 \times (h + Z)^2} \right).$$

Esta es la fórmula de d'Aubuisson, que permite, como se ve, calcular el desnivel ó caída superficial aguas arriba del puente, la cual se debe á la presencia de la obra construída sobre el cauce del río.

En cuanto al coeficiente de contracción se hará $K = 0{,}85$, cuando las pilas ó los estribos del puente presentan superficies planas perpendiculares á la corriente, y $K = 0{,}95$ cuando las pilas presentan á la corriente formas de proa terminadas en una arista aguda que favorece la dirección y encauzamiento de las aguas á la entrada del arco.

Hay que tener presente que la incógnita Z buscada, figura en el primero y en el segundo miembro de la fórmula, y que por lo tanto, no puede calcularse su valor más que por el método de aproximaciones sucesivas.

Se empezará por suponer $Z = o$ en el segundo miembro y se obtendrá, por esta hipótesis, un primer valor aproximado que será:

$$Z = \frac{Q^2}{2g} \times \left(\frac{1}{K^2 \times l^2 \times h^2} - \frac{1}{L^2 \times h^2} \right).$$

Este primer valor numérico que llamamos Z_1 se llevará al segundo miembro de la ecuación completa y se calculará un segundo valor de Z por la fórmula:

$$Z = \frac{Q^2}{2g} \times \left(\frac{1}{K^2 + l^2 \times h^2} - \frac{1}{L^2 \times (h + Z_1)^2} \right)$$

y así sucesivamente, hasta que el valor de Z calculado por este método no se diferencia del anterior más que en una cantidad despreciable.

23. Presión ejercida por los líquidos en movimiento. Los líquidos en reposo contenidos en un recipiente, ejercen contra las paredes de éste esfuerzos normales que se deben á su peso y que constituyen la *presión hidrostática*.

Si consideramos, por el contrario, un líquido en movimiento, sobre una pared, podrán presentarse dos casos: ó bien el movimiento del líquido tiene lugar en una dirección paralela á la de la pared, ó se efectúa en una dirección más ó menos oblícua. En el primer caso, es evidente que la presión soportada por el plano del movimiento se debe sencillamente á la gravedad y se reduce á la presión hidrostática, es decir, es la misma que se ejerceria si el líquido estuviera en reposo.

Cuando la pared se presente oblícuamente con relación al movimiento del líquido, ya no sucederá lo mismo. El fluído, animado de una cierta velocidad vendrá á chocar contra la pared que se interpone en su dirección y que constituye un obstáculo á su movimiento, y se producirá una especie de choque permanente que equivale á una presión suplementaria, á la que se llama *presión viva*, por oposición á la presión de reposo hidrostático.

Al estudiar estos fenómenos, conviene recordar las leyes del choque de los cuerpos: cuando éstos están dotados de una gran elasticidad, no sufren, en el momento del choque, más que deformaciones temporales, volviendo á tomar inmediatamente después del choque su forma primitiva: luego se separan y continúan moviéndose conservando la misma velocidad diferencial, uno con relación al otro, pero en sentido contrario, es decir, que el cuerpo de masa inferior se proyecta sobre el de masa mayor y los dos cuerpos van separándose después del choque.

Si se trata, por el contrario de cuerpos blandos, es decir ,enteramente desprovistos de elasticidad, las dos masas continúan moviéndose juntas con

una velocidad común en el sentido de la que tenga, antes del choque, mayor cantidad de movimiento, la cual es, como se sabe, el producto de la masa de un cuerpo por su velocidad.

Sean, por ejemplo, dos cuerpos cuyas masas tengan por valor dos números cualquiera, que llamaremos m y m' y sean v y v' sus velocidades respectivas. Sus cantidades de movimiento serán $m \times v$ para uno y $m' \times v'$ para el otro. Si suponemos que el cuerpo de masa m va delante del de masa m' y que la cantidad de movimiento $m \times v$ sea mayor que $m' \times v'$, la masa m' será arrastrada después del choque en la dirección de la masa m y las dos se moverán juntas conservando la deformación causada por el choque con una nueva velocidad u distinta de v y de v'.

Los dos cuerpos después del choque no forman, pues, más que una sola masa, cuyo valor es $(m + m')$, cuya velocidad es u y cuya cantidad de movimiento es por consiguiente $(m + m') \times u$.

Ahora bien; sucede que en el choque de dos cuerpos blandos, la cantidad de movimiento del conjunto se conserva y tiene el mismo valor después del choque que antes y por lo tanto se puede escribir que

$$m \times v + m' \times v' = (m + m') \times u;$$

dividiendo los dos miembros por $(m + m')$, lo ual no altera la igualdad:

$$u = \frac{m \times v + m' \times v'}{m + m}.$$

Por otra parte, se observa que cuando dos cuer-

pos blandos llegan á chocar, se calientan y el calor así desprendido, representa una cierta cantidad de trabajo que se disipa por el enfriamiento en la atmósfera y que corresponde á una cierta pérdida de energía.

Ahora bien; el trabajo ó la energía almacenada en una masa en movimiento está expresada por el producto $\frac{m \times v^2}{2}$ á la cual se da el nombre de *potencia viva*.

La potencia viva total del sistema es igual, antes del choque, á la suma de las potencias vivas de las dos masas, ó sea á $\frac{m \times v^2}{2} + \frac{m' \times v'^2}{2}$: después del choque se reduce á la potencia viva del bloque de las dos masas, ó sea á $\frac{(m + m') \times v^2}{2}$. Esta cantidad, que representa la energía que queda almacenada en el bloque, después del choque, difiere de la energía total que encerraban antes las dos masas, en toda la energía correspondiente al trabajo de deformación de los cuerpos blandos y á la energía calorífica que resulta.

La pérdida de energía debida al choque puede, pues, expresarse por la diferencia:

$$\text{Pérdida de trabajo} = \frac{m v^2 + m v'^2}{2} - \frac{(m + m') v^2}{2}$$

Esta pérdida de energía no influye, por otra parte, en nada sobre el principio de la conservación de la cantidad de movimiento que permanece constante, de manera que la velocidad v, que figura en la expresión anterior, no es otra que la que se ha deducido antes de la teoría invocada.

Se podrá pues, llevar el valor de v, calculado así á esta última fórmula, que se convertirá haciendo reducciones en

$$\text{pérdida de trabajo} = \frac{m \times (v - v')^2}{2}.$$

Haremos constar, sin embargo, que se llega á esta simplificación solamente en la hipótesis en que una de las masas es bastante pequeña para ser despreciada en el cálculo, delante de la otra. Esta fórmula encontrará su aplicación en el caso de una masa de agua que cae sobre la pared sólida de un órgano de una máquina.

Es interesante estudiar la presión total, presión viva y presión hidrostática que resultan del choque de una vena líquida contra un plano fijo. En este caso, la vena líquida, proyectada bajo la forma de una masa prismática, se ensancha al llegar al plano y los filetes líquidos que antes eran paralelos, cambian de dirección para extenderse sobre el plano según una capa de mayor ó menor espesor.

El valor de las reacciones ó presiones recíprocas que se ejercen entre la masa líquida y el plano, depende evidentemente de la inclinación de esta pared sobre la vertical y también de la oblicuidad más ó menos grande de la vena líquida con relación al plano contra el que viene á chocar.

Supongamos primero que la dirección de los filetes paralelos del prisma líquido, antes de la deformación, sea perpendicular al plano. La presión hidrostática depende exclusivamente del peso de la masa líquida comprendida entre el origen de la deformación y el plano: si éste fuera horizontal, la presión sería igual al mismo peso P de esta masa;

pero si está inclinado un cierto ángulo sobre el horizonte, la presión se reducirá á la componente del peso normal al plano.

Si llamamos K la pendiente del plano con relación á la horizontal, esta componente vendrá dada por la expresión $P \times \frac{1}{\sqrt{1+K^2}}$; si la inclinación es de 45°, por ejemplo, ó la pendiente de un metro por metro, K es igual á 1 y se tiene:

$$P \times \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} = \frac{P}{\sqrt{2}} = 0{,}70\,P.$$

La presión viva resulta de la potencia viva de la masa líquida considerada: en efecto, si llamamos d al peso específico del líquido y S á la sección del prisma de filetes paralelos, el peso del líquido que viene á chocar con una velocidad V contra la pared fija, en cada segundo será: $d \times S \times V$, y la masa

$$m = \frac{d \times S \times V}{g}$$

siendo g la aceleración de la gravedad ó sea 9,81 metros por segundo. La cantidad de movimiento de la masa considerada será, por lo tanto,

$$q = \frac{d \times S \times V}{g} \times V = \frac{d \times S \times V^2}{g}.$$

Pero se demuestra que esta cantidad de movimiento á la cual se da, por otra parte, el nombre de fuerza viva, sirve de medida á la presión viva que determina sobre el plano fijo.

Si los filetes líquidos paralelos forman un cierto ángulo con la normal al plano, en contra de la hipótesis admitida al principio, esta fuerza actuará solamente por su componente en la dirección de esta normal.

Designemos ahora por K' la pendiente de la dirección de los filetes paralelos con la perpendicular al plano: la componente buscada tendrá por expresión:

$$\frac{d \times S \times V^2}{g} \times \frac{1}{\sqrt{1+K'^2}}.$$

Si se hace la suma de las dos presiones se tendrá, para la presión total R ejercida sobre la pared fija:

$$R = \frac{P}{\sqrt{1+K^2}} + \frac{d \times S \times V^2}{g \times \sqrt{1+K'^2}}.$$

Consideremos ahora el caso de una placa delga-

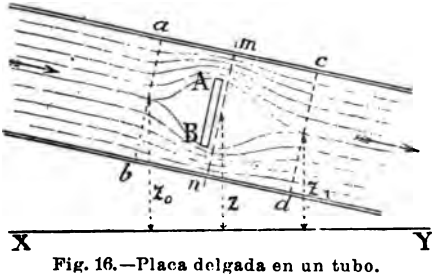


Fig. 16.—Placa delgada en un tubo.

da tal como $A\,B$ (fig. 16), colocada en el interior de

un tubo cilíndrico, normalmente á la dirección de la corriente.

La vena líquida se divide en la proximidad de esta placa y se producen remolinos, tanto aguas arriba como aguas abajo: el paralelismo de los filetes líquidos cesa á partir de una cierta sección $a\,b$ y no se restablece hasta una distancia determinada después de la placa, por ejemplo en $c\,d$.

La placa citada, estando en el seno del líquido, recibe por su parte una presión R_0 sobre la cara anterior ó de aguas arriba, dirigida en el sentido de la corriente y una presión R_1 dirigida en sentido inverso sobre la cara opuesta: la presión resultante R_2 valdrá, pues, $R_2 = R_0 - R_1$ y será precisamente igual á la reacción de la placa contra el líquido.

Si designamos por S la sección del tubo, por p_0 la presión por unidad de superficie sobre la cara anterior y por p_1 la presión sobre la posterior, la resultante de las presiones que se ejercen según el eje del tubo normalmente á la placa será: $S \times (p_0 - p_1)$.

Hay que tener también en cuenta el peso del líquido que interviene en el fenómeno, es decir, del comprendido en el volumen $a\,b\,c\,d$ que es el lugar de los remolinos producidos por la presencia de la placa. Sin embargo, sólo debe considerarse la componente de este peso según la dirección de la corriente, la cual se obtiene proyectando la fuerza vertical que representa este peso sobre el eje del tubo, ó inversamente proyectando esta dirección sobre la vertical.

Si d es la densidad del líquido, el peso del cilindro $a\,b\,c\,d$ será $d \times S \times a\,c$ y como la proyección de $a\,c$ sobre la vertical es igual á $Z_0 - Z_1$ se tie-

drá para valor de la componente de la gravedad que hay que considerar: $d \times S \times (Z - Z_1)$.

Las dos fuerzas consideradas anteriormente, ó sean la resultante de las presiones y la acción de la gravedad relativa al peso del líquido, deben ser iguales á la reacción R_2 opuesta por la placa á la presión efectiva del líquido y se podrá escribir:

$$R_2 = d \times S \times \left(Z_0 - Z_1 + \frac{p_0}{d} + \frac{p_1}{d} \right).$$

La velocidad V' del líquido en la sección contraída $m\,n$, muy próxima á la cara posterior de la placa, es necesariamente mayor que la velocidad V en la sección entera $a\,b$. Designando por p la presión en $m\,n$ por unidad de superficie, la aplicación del teorema de Bernoulli (§ 2) permite escribir que

$$\frac{V'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} = Z_0 - Z + \frac{p_0}{d} - \frac{p}{d}.$$

En $c\,d$ la velocidad es la misma que en $a\,b$ puesto que las dos secciones de salida son iguales: por otra parte, si aplicamos el mismo teorema entre las secciones $m\,n$ y $c\,d$, habrá que tener en cuenta la pérdida de carga que resulta del ensanchamiento brusco que se produce inmediatamente detrás de la placa. Esta pérdida de carga tiene por expresión (§ 8): $\frac{(V' - V)^2}{2g}$ de modo que tendremos:

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} = Z - Z_1 + \frac{p}{d} - \frac{p_1}{d} - \frac{(V' - V)^2}{2g}.$$

Sumando las dos igualdades anteriores miembro á miembro y haciendo toda clase de reducciones,

$$\frac{(V')-V^2}{2g} = Z_0 - Z_1 + \frac{p_0}{d} - \frac{p_1}{d};$$

y si observamos que el segundo miembro de esta igualdad es el término encerrado entre paréntesis del valor R_2, resulta ésta igual á

$$R_2 = d \times S \times \frac{(V'-V)^2}{2g}$$

que es el valor de las presiones recíprocas de la placa y del líquido.

Se demuestra fácilmente que esta relación puede ponerse bajo la forma

$$R_2 = d \times Q \times \frac{V^2}{2g} \times K$$

en la cual Q es el área de la placa $A\,B$ y K un coeficiente numérico que varía entre 3,66 y 1,13 cuando la relación $\frac{S}{Q}$ de la sección del tubo á la superficie de la placa varía á su vez entre 2 y 20.

Sean, por ejemplo, $\frac{Q}{S} = 2$; d, densidad del agua igual á 1.000 kgs. por m^3; $V = 1$ m. y $Q = 0{,}5$ m^2. La fórmula da, en este caso,

$$R_2 = 1.000 \times 0{,}5 \times \frac{1}{19.62} \times 3{,}66 = 94 \text{ kgs.}$$

Si substituímos la placa considerada por un ci-

lindro de poca altura, colocado de tal manera que su eje coincida con el del tubo, supuesto horizontal, la reacción de la base anterior de este cilindro sobre el líquido, é inversamente, del líquido sobre esta base, de superficie Q, vendrá dada por la fórmula análoga:

$$R'_2 = d \times Q \times \frac{V^2}{2g} \times K'$$

en la que el coeficiente K' es menor que K y frecuentemente menor que su mitad.

El cilindro, en lugar de terminar aguas arriba en una base plana, podría llevar una proa que sirviese de transición de la sección del tubo á la sección anular comprendida entre el tubo y el cilindro: en este caso el valor de K' disminuye porque la contracción de la vena líquida es menor.

En el caso de cuerpos sumergidos en un canal, cuya sección es muy grande con relación á la del cuerpo sumergido, las condiciones del movimiento del agua en las inmediaciones de este cuerpo son muy diferentes de las que hemos considerado antes y es imposible calcular las reacciones recíprocas del líquido y del cuerpo sólido.

Se admite, sin embargo, por analogía, que estas reacciones pueden traducirse por una fórmula parecida:

$$R = d \times Q \times \frac{V^2}{2g} \times K$$

en la que hay que hallar experimentalmente los valores de K que corresponden á valores conocidos de R. Esto ha sido hecho por M. Dubuat, que ha

encontrado que los valores de K aplicables á los diferentes casos de una placa, de un cubo ó de un prisma sumergidos en una corriente de gran sección, eran respectivamente 1,86, 1,46 y 1,34.

En lugar de considerar un cuerpo fijo sumergido en una corriente, se puede estudiar el caso de cuerpos flotantes prismáticos terminados por una proa y una popa: la resistencia de estos cuerpos en movimiento en el líquido, se expresará siempre por la misma fórmula.

El valor de K varía según que el líquido está en reposo ó en movimiento y también con la forma de los extremos, que hacen de proa y popa del cuerpo flotante.

Para superficies planas, anterior y posterior $K = 1{,}10$: con proa muy aguda $K = 1{,}00$: si existe además popa $K = 0{,}50$ y por último, en los buques K vale solamente 0,16.

CAPÍTULO IV

LOS RECEPTORES HIDRÁULICOS

24. Potencia de un salto de agua.—Fábricas hidráulicas.—Los motores ó receptores hidráulicos tienen por objeto recibir la energía de un salto de agua y transformarla en trabajo mecánico. Como siempre, la transformación no es completa porque se producen pérdidas que proceden de los remolinos y de los choques mutuos de las moléculas líquidas á la entrada y en el interior del receptor, de los rozamientos y de las reducciones de la velocidad del agua á la salida del receptor.

Si se llama P al peso en kilogramos, ó al número de litros de agua, que pasan á través del receptor durante la unidad de tiempo, cayendo de una altura H medida entre las dos secciones anterior y posterior, situadas en la proximidad inmediata del receptor, la energía contenida en esta masa de agua y suministrada por ella, por segundo, será, por la definición misma del trabajo mecánico, igual á $P \times H$.

Además, como esta masa está animada de una velocidad v_0, posee una cierta potencia viva que es:

$$\frac{m \times v_0^2}{2} = \frac{P \times v_0^2}{2g}$$

la energía total almacenada en la masa del ua es:

$$P \times H + \frac{P \times v_0^2}{2g} = P \times \left(H + \frac{v_0^2}{2g}\right).$$

Pero, por otra parte, el agua al salir del receptor conserva todavía una cierta velocidad remanente v_1, indispensable para que pueda circular por el canal de desagüe y arrastra consigo una cantidad de energía igual á $\frac{P \times v_1^2}{2g}$ que se pierde por completo, de modo que la energía aprovechada por el receptor, es exactamente igual á la diferencia

$$P \times \left(H + \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}\right).$$

En la práctica, las velocidades v_0 y v_1 difieren poco de manera que los dos últimos términos del paréntesis casi se destruyen: la expresión de la energía ó trabajo del motor Tm transmitido al motor por la caída de agua, puede, por lo tanto, reducirse sencillamente á

$$Tm = P \times H.$$

Como antes hemos dicho, esta energía no se transforma enteramente en trabajo mecánico útil para el receptor por las diversas causas de pérdida indicadas y muy especialmente por los rozamientos: si designamos la suma de estos trabajos perdidos por Tf, se tendrá, para expresión del trabajo útil Tu:

$$Tu = Tm - Tf = P \times H - Tf.$$

El rendimiento que, por definición, es igual á la relación del trabajo útil á la energía total suministrada, será pues:

$$\frac{Tu}{Tm} = \frac{P \times H - Tf}{P \times H}.$$

Por consiguiente, el rendimiento será tanto mayor cuanto menor sea el término sustractivo Tf, y será necesario procurar, tanto en la construcción de los motores, como en toda la instalación hidráulica, el que se realicen las condiciones más favorables para que la pérdida Tf sea lo menor posible.

Un salto de agua se produce por medio de una presa natural ó artificial. La diferencia entre el nivel superior ó de aguas arriba y el inferior ó de aguas abajo de la presa, tomados estos niveles inmediatamente antes y después de la misma, es lo que constituye la altura de caída.

La parte del río situada inmediatamente detrás de la presa, es decir, aguas abajo de la misma, no sufre ninguna influencia, desde el punto de vista de las variaciones de nivel de la superficie, por la presencia de la presa. No sucede lo mismo en lo que concierne al régimen del nivel del agua en la parte anterior á la presa, el cual puede modificarse sensiblemente, como hemos visto antes (§ 20).

La instalación de una fábrica hidráulica sobre un río cualquiera, está sujeta á disposiciones legales las cuales fijan las condiciones del aprovechamiento que puede variarse mediante nueva petición y nueva concesión, no creyendo necesario dar aquí la parte legislativa referente á utilización de saltos de agua.

25. Clasificación de los motores hidráulicos.—Hemos expuesto anteriormente las leyes que presiden los movimientos y la distribución del agua; constituyen las masas de agua en movimiento, como también hemos visto fuentes de energía que vamos á ver cómo puede recogerse y utilizarse

para ser transformada en trabajo, llegando así al estudio de los receptores hidráulicos.

Conviene, ante todo, hacer notar que el agua parece haber sido particularmente creada para producir energía mecánica, porque es, en primer término un fluído, es decir, un elemento cuyas moléculas pueden desplazarse fácilmente, unas con relación á otras, cuya masa, por efecto de la atracción terrestre, se pone en movimiento adquiriendo la velocidad que le da su fuerza viva, se vierte en recipientes cuya forma toma y los abandona también con una gran facilidad.

Por otra parte, el agua es además un cuerpo pesado que, por esto mismo, es susceptible de poseer una cierta energía, aun en estado de reposo, energía que se manifiesta por la presión que el líquido ejerce sobre las paredes y que puede traducirse en un trabajo efectivo si las paredes son móviles.

Se ve, pues, que el agua es susceptible de producir trabajo de varias maneras diferentes, sea gastando la fuerza viva que la anima, como un martillo pilón que efectúa su trabajo de forja anulando la velocidad de su movimiento, sea por presión hidrostática sobre piezas móviles del aparato receptor, ó sea, por último, por fuerza viva y por presión.

Estas consideraciones nos demuestran que los receptores hidráulicos deberán presentar disposiciones adecuadas á la manera de utilizar la potencia motriz, y podrán clasificarse, desde este punto de vista, en las dos categorías ó grupos siguientes:

Receptores que utilizan á la vez la potencia viva del agua y su peso, como las *ruedas de paletas* y las *ruedas de admisión lateral* de paletas planas.

Los que deben su energía á la potencia viva de las corrientes, como las *ruedas suspendidas*, las de *admisión inferior* y las *turbinas*.

Sin embargo, las ruedas hidráulicas difieren esencialmente por su construcción, su forma y su sistema de ser instaladas, de las turbinas que constituyen los verdaderos receptores de potencia viva.

Por esto agruparemos en nuestro estudio, siguiendo la costumbre, los diversos tipos de ruedas hidráulicas en un grupo y las turbinas en otro.

Las primeras se dividen en ruedas de *admisión superior* que reciben el agua por la parte más alta de la llanta: ruedas *laterales* en las cuales el agua entra por un costado á un nivel algo más alto que su horizontal que pasa por el centro del aparato, y por último ruedas de *admisión inferior* que reciben el agua por las paredes más bajas.

Esta enumeración demuestra desde luego que el empleo de las ruedas hidráulicas está limitado á los saltos de agua de poca altura que no pueden llegar en la práctica á más de 12 m. En efecto, como las ruedas adecuadas para saltos mayores son las de admisión superior, se ve que en este caso la rueda debe tener una altura próximamente igual á la de la caída, es decir, un diámetro que en la práctica no puede pasar de los 15 m. citados sin dar lugar á aparatos de unas dimensiones y de un peso inadmisibles.

Las ruedas son siempre de eje horizontal: las turbinas, por el contrario, pueden montarse indistintamente sobre ejes horizontales ó verticales.

El agua actúa de una manera distinta según el tipo ó sistema de construcción de la turbina. Cuan-

do el agua llena completamente los compartimientos de la rueda móvil y ejerce una cierta presión hidrostática en el interior de los canales comprendidos entre las paletas, las turbinas se llaman de *reacción*.

Si las paletas de la corona móvil tienen una sección superior á la que corresponde estrictamente á las condiciones normales del movimiento, las láminas de agua no llenan completamente los canales móviles, sino que se desvían libremente por las caras conversas de las paletas transmitiéndolas la mayor parte de su fuerza viva, y en este caso tenemos la turbina de *libre desviación*.

Por último, puede también realizarse la primera condición sin que la lámina líquida que atraviesa la rueda esté sometida á ninguna presión, y en este caso la turbina es de las llamadas de *reacción nula*.

Se concibe que los diversos sistemas en los cuales las paletas móviles están enteramente llenas de agua sean susceptibles de funcionar indistintamente en el aire ó en el agua, es decir, que estas turbinas pueden marchar *sumergidas*.

De esto resultarán varias ventajas: en primer lugar, esta circunstancia permite colocar la turbina lo más baja posible, de tal manera que se utilice la caída máxima y, además, como la turbina está debajo del agua, puede seguir marchando aun en los casos de grandes fríos, porque el agua sólo se congelará en la superficie.

Desde el punto de vista de la instalación, el empleo de una turbina sumergida permite dejar enteramente libre el suelo de la casa de máquinas, y por lo tanto, el espacio de que se dispone es mayor y los movimientos resultan más fáciles.

En general, las turbinas son tan convenientes en los saltos de gran altura como en los que la caída es muy pequeña: pero tienen una gran superioridad en el primer caso y son los receptores por excelencia para aprovechar los grandes saltos naturales de los países montañosos: en efecto, como la energía producida por la caída se obtiene multiplicando la altura de la misma por el caudal de agua de que se dispone, se comprende que, para un mismo esfuerzo, cuanto mayor sea el salto menor cantidad de agua es necesaria, y por lo tanto, más pequeña y manejable puede ser la turbina.

En tanto que las ruedas hidráulicas no reciben el agua motriz más que por una paleta ó por algunas á la vez, la turbina puede alimentarse por toda la periferia de la rueda móvil, lo cual permite también reducir las dimensiones del aparato.

Se puede añadir que las turbinas están siempre animadas de una velocidad más grande que las ruedas, las cuales giran muy lentamente, dando como resultado una complicación más grande en las transmisiones de movimiento del árbol á los aparatos de trabajo. Si se considera también que las turbinas se construyen completamente de metal, se comprenderá que exigen reparaciones poco importantes, y por último, otra ventaja de las turbinas es, que el sentido de rotación es independiente del sentido de la corriente, lo que no pasa en las ruedas.

En cambio las turbinas son más complicadas de construcción y más difíciles de instalar que las ruedas; exigen que el fondo del canal de desagüe sea más profundo que para las ruedas y se

obstruyen más fácilmente por los cuerpos arrastrados por las aguas.

26. Descripción de las diversas ruedas hidráulicas.— Antes de describir en detalle los diversos receptores hidráulicos, daremos de ellos una ligera idea que permita considerar el conjunto de estos motores y sus aplicaciones, en cada caso práctico.

Las ruedas *de admisión superior* pueden tener ó no una compuerta en el canal de llegada del agua.

En este último caso la rueda lleva encima un canal por donde llega el agua, hasta el punto más alto de la rueda, á plena sección, es decir, sin la interposición de una compuerta que puede bajar más ó menos y limitar el gasto. El agua que circula libremente en este caso debe presentar una lámina de espesor constante, siendo, por lo tanto, conveniente este sistema, en el caso en que el nivel de aguas arriba es sensiblemente invariable.

Cuando este nivel y el gasto son susceptibles de variar, se recurre á la compuerta superior, en la que termina entonces el canal, permitiendo esta compuerta regular el orificio de salida, según la altura de la lámina de agua que forma una carga más ó menos grande encima del orificio.

Estas ruedas se emplean para caídas de 3 á 12 metros y gastos de 500 á 1.500 litros como máximo. Las ruedas de la segunda clase giran á mayor velocidad y pueden, por consiguiente, gastar más agua con las mismas dimensiones. La consideración de la velocidad es interesante cuando se trata de mover máquinas, como las dinamos que marchan con gran velocidad y en fábricas de resisten-

cia variable. La rueda que funciona á mayor marcha será entonces preferible porque permitirá simplificar los trenes de engranajes y todas las transmisiones, y hará, por otra parte, el papel de volante susceptible de regularizar el movimiento, á pesar de las variaciones momentáneas de carga.

Cuando el nivel de aguas abajo es variable, hay que cambiar la dirección del canal de desagüe de tal manera, que las paletas no giren en sentido inverso de la corriente en el canal. Se puede, sin embargo evitar estos trabajos siempre costosos adoptando la rueda de *admisión superior con busa* en la que una especie de tubo colocado en el fondo del canal de llegada dirige la lámina líquida en una dirección que hace girar la rueda en el sentido que se quiera.

La *rueda de pecho* está dispuesta para recibir el agua por un costado. Gira, pues, en el sentido de la corriente aguas abajo, y puede sumergirse 10 ó 12 centímetros en el canal de desagüe como la precedente. El agua llega por una compuerta de persianas que dirigen los filetes líquidos según las paletas de la rueda.

Es evidente que estas máquinas convienen para pequeñas caídas y se las utiliza para diferencias de nivel de 2,60 á 3 metros, y cuando los dos niveles el superior y el inferior son susceptibles de variar.

En estas diversas ruedas el agua se escapa de las paletas antes que éstas hayan llegado, girando á la parte baja de su carrera, y perdiéndose, por tanto, una parte del trabajo debido al peso del agua. Para evitar este inconveniente, se encaja, por decirlo así, la cuarta parte inferior de la rueda

en una coraza circular que obstruye los canjilones y se opone á que se vierta el agua antes de tiempo.

Esta coraza, además de exigir gastos suplementarios de instalación, presenta también el inconveniente de dejar pasar una cantidad notable de agua, si el juego entre ella y la rueda es demasiado grande, ó de causar grandes rozamientos si es insuficiente.

La rueda del Ingeniero Millot, está combinada para asegurar la permanencia del agua en los canjilones hasta el punto más bajo de su carrera, suprimiendo la coraza. Para ello, los canjilones que son muy profundos están dispuestos de tal manera, que penetran unos en otros y la paleta exterior se desarrolla encurvándose según la circunferencia exterior. Las partes anteriores de las paletas se recubren, por lo tanto, casi enteramente dos á dos, lo que exige que el agua se introduzca por la parte interior.

Todas las ruedas anteriores reciben el agua por encima del centro: también se construyen ruedas *laterales* que giran en una coraza envolvente y que reciben el agua por debajo de la horizontal de su centro.

En el caso de la rueda sin compuerta superior, el canal de llegada se determina por un *cuello de cisne*, puesto á continuación de la envolvente circular y sobre el cual se apoya una compuerta en cima de la que corre el agua vertiendo en la rueda.

Esta rueda se emplea para caídas de 1 á 1,50 metros. Cuando el nivel de aguas arriba y el gasto son variables, se usa la alimentación por compuerta superior y el líquido sale por debajo del orificio de la compuerta.

En estas ruedas el agua se sostiene en los canjilones por una coraza de mampostería que presenta dos paredes laterales que son continuación de las del canal de llegada.

La *rueda sifón de Sagebien* es también una rueda de admisión lateral pero está construída basándose en un principio distinto. Las paletas de gran altura son planas y están colocadas oblicuamente y no según los radios del círculo. El agua entra en la rueda pasando por encima de la compuerta en cuello de cisne, pero sin caer como en el caso de un vertedero y va llenando sucesivamente los canjilones que se sumergen en el agua del canal de llegada, tomando en ellos el mismo nivel que en aquél tuviera.

Esta rueda funciona, pues, como un contador de agua, y su consumo es proporcional á su velocidad. Es muy conveniente para caídas pequeñas de 0,60 á 2,60 metros, y puede gastar un gran volumen de agua por segundo, pero es de una construcción muy costosa, por sus grandes dimensiones, y como marcha muy lentamente, no es apropósito para mover máquinas de resistencias variables, á no ser que se interpongan en los árboles de transmisión, volantes reguladores.

Las *ruedas de admisión inferior* se caracterizan porque la alimentación se hace por una *compuerta de fondo* que dirige el agua contra las paletas inferiores de la rueda, de tal manera, que en este caso, el agua no actúa por su peso, sino solamente por su fuerza viva. Estas ruedas se usan cuando el salto es menor que 1 m.; es fácil de construir, puede marchar muy de prisa, y, por consiguiente, gastar mucha agua por metro de anchura.

El rendimiento de las ruedas de admisión inferior, *con paletas planas*, es menor que en las ruedas laterales. Poncelet ha mejorado notablemente este rendimiento substituyendo las paletas planas por otras curvas y ahuecando el caz según una superficie cilíndrica al extremo de la cual viene á unirse tangencialmente la paleta curva, con lo que se consigue que el agua penetre sin choque y que el rendimiento aumente de 35 á 60 por 100.

Las ruedas más sencillas que se pueden imaginar, son las *ruedas flotantes* cuyas paletas planas se sumergen sucesivamente en la corriente: estas ruedas funcionan, pues, en pleno río sin presas ni compuertas de ninguna clase, debiéndose el movimiento exclusivamente á la energía cedida por la fuerza viva de la corriente.

Cuando el nivel es variable, la rueda debe seguir las fluctuaciones del río y entonces se emplean ruedas sostenidas por barcazas ó las del sistema del Ingeniero Colladon, que están dispuestas para flotar en el agua.

Por último, merecen citarse las ruedas americanas y especialmente la rueda *Pelton* construída especialmente para grandes caídas. El chorro de agua cae directamente sobre las paletas llenándolas y el trabajo se efectúa bajo su impulso y bajo la acción del peso del líquido. Esta rueda funciona, pues, en condiciones intermedias entre las ruedas ordinarias y las turbinas.

27. Descripción de los diferentes tipos de turbinas. — Las turbinas paralelas y centrífugas pueden funcionar por *desviación libre* ó por *reacción*.

En el primer caso, sabemos que la velocidad del

agua á la salida de las paletas de la *corona directriz*, es exactamente igual á la velocidad que resulta de la presión hidrostática en el nivel considerado.

Para que sea así, es absolutamente necesario que la sección de salida de los *álabes móviles* sea mayor que la de los canales de la corona directriz: el agua circula entonces en un medio en el que se ejerce la presión atmosférica, como en un canal descubierto, para lo cual se pone el interior de los álabes en comunicación con la atmósfera por medio de unos orificios.

Resulta de estas circunstancias que las turbinas de libre desviación no pueden funcionar sumergidas. Se establecerán, por tanto, por encima del nivel de aguas abajo, de tal manera que la base de la corona móvil quede algunos centímetros por encima. Este tipo de turbinas no conviene, por consiguiente, más que en los casos en que el nivel inferior es muy poco variable.

Cuando las paletas ó álabes móviles están completamente llenos de agua, la velocidad de movimiento, al salir de los canales directores es inferior á la que se debería á la altura de caída. El agua reacciona entonces sobre los álabes móviles y ejerce una cierta presión que viene á sumarse á la fuerza viva de las venas líquidas para producir el movimiento de rotación de la corona móvil.

En estas condiciones, estando llenos los álabes, el gasto permanece constante. Una turbina de este tipo puede funcionar *sumergida*, debiendo colocarse inmediatamente encima del nivel de las aguas más bajas, quedando la corona móvil más ó menos sumergida, según las variaciones del nivel de aguas abajo.

En las turbinas *centrífugas*, de cuyo tipo la más conocida es la turbina Fourneyron, las dos coronas fija y móvil son centrífugas, siendo la exterior la móvil. El agua del salto, llevada á una cámara de agua de la que la turbina forma, por decirlo así, el fondo, penetra de los canales directores y sale horizontalmente del centro á la periferia.

El consumo de una de estas turbinas varía proporcionalmente á la velocidad de rotación, circunstancia muy desfavorable á la marcha de una fábrica, porque un aumento de carga reduce á la vez la velocidad y la potencia, cuando esta última debiera aumentar: inversamente, la potencia aumenta cuando la resistencia de las máquinas herramientas disminuye.

La turbina *centrípeta* presenta una disposición inversa, siendo móvil la corona interior, de modo que el agua va horizontalmente de la periferia al centro. Al contrario de lo que sucede en la turbina centrífuga, el gasto de agua disminuye cuando la velocidad de rotación aumenta á causa de una reducción de carga en la fábrica: el trabajo del motor aumenta, por el contrario, cuando las máquinas necesitan y reclaman una cantidad mayor de energía.

La turbina centrípeta es, pues, en cierto modo, *autoreguladora*, lo que constituye una importante ventaja sobre los demás sistemas de motores hidráulicos.

Las coronas de las turbinas *paralelas* están superpuestas de modo que el agua se mueve en un plano paralelo al eje. La corona móvil, colocada debajo enrasa con el nivel superior, pudiendo estar, sin embargo, sumergida cuando la turbina tenga que funcionar *por reacción*.

Jonval ha ideado una disposición que permite instalar la turbina en un punto intermedio entre el nivel superior y el inferior, colocándola dentro de un tubo vertical acodado en su parte inferior horizontalmente para dar salida al agua hacia el canal de desagüe.

Con esta disposición, la turbina utiliza todo el salto en que está instalada, cualquiera que sea su posición en el interior del tubo, en tanto que el orificio de este tubo esté siempre enteramente sumergido porque si fuese de otro modo, la columna de agua se rompería en el tubo y se suprimiría la continuidad de la presión hidrostática.

Este sistema, que lo mismo se aplica á las turbinas centrífugas que á las centrípetas, es lo que se llama la *jonvalización* de las turbinas.

Se pueden también obtener las ventajas de la libre desviación cuando los motores están colocados por debajo del nivel de aguas abajo empleando el artificio de la *hidropneumatización*, debido á Girard, que consiste en colocar la turbina debajo de una campana, á la cual se envía por medio de una bomba accionada por la turbina misma, el aire á una presión suficiente para que baje el nivel del agua dentro de la campana por debajo del plano inferior de la turbina.

Se disminuye así la altura de caída utilizable para las turbinas de coronas concéntricas, en la mitad del espesor de la corona móvil, pero en el caso de las turbinas paralélas la hidropneumatización no produce ninguna pérdida de caída.

Cuando la altura del agua por encima de la corona directriz es menor que 1 m., se forman remolinos que aspiran el aire atmosférico y el arrastre

de este aire con el agua á los orificios de la corona directriz ocasiona grandes perturbaciones en el movimiento del líquido, resultando una reducción en el gasto y en el rendimiento de la turbina.

Para evitar estos inconvenientes, Girard ha tenido la idea de alimentar los álabes móviles por medio de un *sifón* que toma el agua en el canal de llegada, se eleva por encima del nivel de este canal y viene á ajustarse, por medio de una corona anular, al órgano director.

Gracias á esta disposición, ya no es necesario sumergir la turbina cuando la capa de agua es insuficiente por encima de los orificios de la corona fija. Se aprovecha siempre la altura de caída total, pero, además, la altura de la columna de agua por encima de la turbina se aumenta en todo lo que se eleva el codo del sifón por encima del nivel en el canal de llegada.

En el caso de una gran altura de caída y un caudal muy pequeño, es ventajoso no alimentar la corona móvil más que por una parte de la circunferencia: así se reduce la velocidad de rotación del motor y se aumenta la sección de los álabes, condición favorable para prevenir las obstrucciones.

La corona fija se reduce entonces á un *segmento anular*, encima del cual desemboca un *inyector* de la misma forma, que gasta el agua bajo presión.

Desde hace algunos años los constructores europeos tratan de seguir los sistemas de fabricación de los americanos que han ideado un nuevo tipo de turbinas, las turbinas *mixtas*, las cuales participan á la vez de las condiciones de las centrípetas y las paralelas. El agua, dirigida por la corona fija exterior, penetra en los álabes móviles, s

guiendo una dirección perpendicular al eje, tomando progresivamente un movimiento paralelo á este eje para salir al canal de desagüe.

Pueden estas turbinas funcionar por reacción ó por libre derivación, estar sumergidas ó no y llevar la disposición de Jonval ó la hidropneumatización.

Presentan las ventajas de la turbina centrípeta desde el punto de vista de la autoregularización y al mismo tiempo pueden, como las turbinas paralelas, utilizar todo el salto sin estar sumergidas en el canal inferior.

El aspecto de estas turbinas difiere mucho del de los primeros tipos descriptos. Los álabes afectan la forma helicoidal unas veces y otras la forma de cucharas: están además caracterizadas por su gran altura que llega á veces á ser igual al radio medio de las coronas: resulta de aquí que el perímetro de salida es una línea curva que presenta su gran desarrollo, lo cual permite reducir considerablemente el diámetro de la turbina, dando lugar á una economía importante en el coste de construcción.

Las turbinas Hércules, Leffel, New-American y algunas otras son las más conocidas de este grupo.

De todos modos, hay que tener en cuenta que los rendimientos, aunque grandes, no llegan en algunos casos, á las cifras que los constructores anuncian.

LAS RUEDAS HIDRÁULICAS

28. Rueda de paletas, de admisión superior y sin compuerta. – Después de haber expuesto la clasificación y la descripción general de los receptores hidráu-

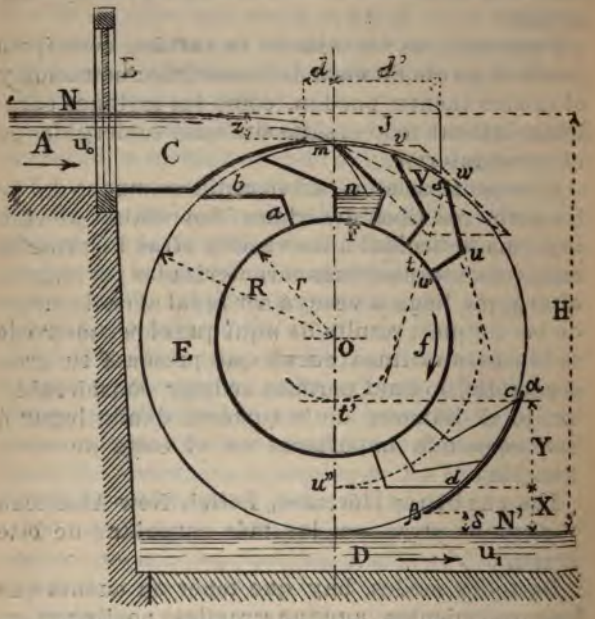


Fig. 17.—Rueda de admisión superior, con compuerta.

licos, estudiaremos ahora en detalle cada uno de los tipos de motores.

La figura 17 demuestra la construcción y la manera de instalar una rueda hidráulica de este primer tipo.

Las paletas están constituídas por alabes ó tabiques formados de dos partes: una *a*, dirigida según el radio de la rueda, y la otra *b*, inclinada según una cierta dirección determinada como veremos más adelante. El fondo de los canjilones está constituído por el cilindro *F* y las paredes laterales por las dos coronas *E*, estando el conjunto armado por remaches sobre unos brazos ensamblados á una pieza central de fundición montada sobre el árbol.

Esta rueda, como su nombre indica, recibe el agua por la parte más alta, estando alimentada por el punto culminante *m*.

El agua llega por el canal rectangular *A* que se prolonga en una parte curva llamada *hucha C*, la cual termina en una boca concéntrica con la corona. Esta boca llega hasta una distancia *d*, detrás del diámetro vertical *o m* de la rueda y está situada á una altura *z* por debajo del nivel *N* del agua en el canal superior. La hucha lleva unos salientes *J* que se prolongan por delante del diámetro vertical para sostener la lámina de agua y dirigirla hacia los canjilones.

Se comprende, desde luego, el funcionamiento de esta rueda: el agua cae del vertedero á la rueda bajo la forma de una lámina parabólica, y actúa de dos maneras: 1.° por la fuerza viva que ha adquirido al caer desde el nivel *N* al vértice de la rueda, es decir, desde una altura *z*; y 2.° por su peso cuando está almacenada en los canjilones.

La potencia útil de esta rueda está dada por la fórmula

$$T u = P \times H - T f$$

en que *P* es el peso en kilogramos, ó el número

de litros gastados por segundo, H la altura comprendida entre los niveles de aguas arriba y aguas abajo y Tf la suma de todas las pérdidas de trabajo que se producen en el funcionamiento de la rueda considerada.

Estas pérdidas son de naturaleza diversa: la primera, debida al rozamiento del agua contra las paredes de la hucha C es despreciable, cuando se tiene cuidado de que estas paredes sean absolutamente lisas.

En segundo lugar, el agua entra en los canjilones con una velocidad absoluta V, resultante de la altura de caída z. Si la velocidad de movimiento de la rueda fuese la misma, el agua entraría, por decirlo así, enteramente en estado de reposo relativo en el canjilón, pero como v es siempre menor que V, y por consiguiente, hay un retraso de la velocidad de la rueda, con relación á la del agua, ésta entra en la rueda con una velocidad relativa w, la cual, lo mismo que la energía correspondiente á ella, se pierde en remolinos del agua en los canjilones; equivale á una pérdida de caída igual á $\frac{w^2}{2g}$ y la pérdida de trabajo que resulta es

$$tf = P \times \frac{w^2}{2g}.$$

En tercer lugar, vemos que los canjilones no conservan su carga de agua, hasta el fin de su carrera circular, sino que empiezan á dejar escapar el líquido al llegar al punto c, y están completamente vacías cuando pasan del d, es decir, á una altura X por encima del punto más bajo.

Para encontrar la posición del punto c, se ten-

drá presente que el agua no llena completamente el canjilón, sino solamente una parte de su volumen, y como se conoce este coeficiente ó tanto por ciento del lleno total, bastará, para determinar el punto *c*, trazar por el extremo *s* de una paleta cualquiera *u' u s*, una recta *s t* tal que la capacidad correspondiente al perímetro *s u u' t* sea precisamente igual al volumen del agua contenida en el canjilón. No habrá más que llevar la recta *s t* á su posición horizontal *c t'*, haciéndola girar alrededor del centro *O*, para obtener la posición buscada. En cuanto al punto *d*, se determina del mismo modo, llevando el mismo canjilón *u s* sobre la horizontal *u" d*.

La altura *Y* representa la caída durante la cual la carga en los alabes varía de *p* á *O*. Se puede, por lo tanto, admitir aproximadamente que todo sucede como si la carga se redujese á la mitad y permaneciera constante durante la caída *Y*, ó como si se perdiese la mitad de la caída $\frac{Y}{2}$. Por último, á esta pérdida, debe añadirse la altura *X* del punto *d* por encima del nivel de aguas abajo.

La pérdida de trabajo que resulta por estas dos causas, estará expresada por

$$tf = P \times \left(\frac{Y}{2} + X\right).$$

Finalmente, cuando el agua cae progresivamente de *c* á *d*, abandona la rueda con una velocidad *v* igual á la de la rueda, y la pérdida de trabajo que resulta de esto tiene por valor

$$tf = P \times \frac{v^2}{2g}.$$

En resumen, el total de las pérdidas, al menos de las más importantes, está dado por la suma

$$tf = P \times \left(\frac{w^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} + \frac{Y}{2} + X \right).$$

Se demuestra que, si se da la velocidad absoluta del agua vertiéndose en los alabes, la suma $\frac{w^2 + v^2}{2g}$ será mínima cuando la velocidad tangencial v sea la mitad de la proyección de la velocidad absoluta V sobre la dirección de v.

Si nos referimos al paralelogramo de la composición de las velocidades v, w y V, se ve que, dada la velocidad V en magnitud y dirección, se podrá determinar fácilmente el valor de v, y el tercer lado w del triángulo de las velocidades resultará inmediatamente.

Ahora bien; la dirección de w es justamente la que hay que dar á la parte exterior del alabe para que la entrada del agua en la rueda tenga lugar sin choque, y determina, por lo tanto, el trazado de este alabe.

En la práctica no suele sujetarse exactamente á este trazado, porque resultaría la parte más externa del alabe en dirección sensiblemente radial, y se adopta una dirección que forma con la de v un ángulo de 25 á 30°. En estas condiciones, no se evitan los choques contra el alabe, y destruyéndose así la velocidad V, se pierde la energía correspondiente á la potencia viva y á la altura de caída $\frac{V^2}{2g}$. Esta pérdida substituirá á la referente á la velocidad relativa, en la expresión de

las pérdidas de trabajo, que se reducirá á

$$Tf = P\left(\frac{V^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} + \frac{Y}{2} + X\right).$$

La velocidad absoluta de salida del agua por el vertedero, depende de la altura z, escogida para la lámina de agua, debiendo estar comprendida entre 10 y 20 cms.: la primera es la más adecuada para caídas pequeñas y la segunda para caídas y caudales de agua grandes.

El gasto del vertedero se calcula, como hemos visto precedentemente, por la relación

$$Q = l \times q = 0{,}385\, l\, z \times \sqrt{2\, g\, z}$$

en la cual q es el gasto por metro de anchura del vertedero que varía entre 46 y 152 litros por segundo, cuando varía de 10 á 20 cms. el espesor de la lámina de agua.

La anchura l de la hucha se deduce de la relación

$$l = \frac{Q}{q}.$$

Del mismo modo, para la velocidad absoluta de salida del agua en el vertedero, se tiene que

$$V_0 = \sqrt{2\, g \times \frac{z}{3}}$$

ta velocidad es de 0,80 m. para $Z = 0{,}10$ y de 44 para $z = 0{,}20$.

La velocidad V de entrada del agua en el canjilón es la resultante de la velocidad horizontal de movimiento del agua en el vertedero y de la velocidad vertical debida á la altura de caída; estas dos velocidades forman, pues, los dos lados del ángulo recto de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es la velocidad V.

Siendo el espesor real de la lámina de agua igual á $\frac{2}{3}\,z$, el filete medio emerge del vertedero en un punto situado por encima de la corona de la rueda á una altura igual á $\frac{z}{3}$ aumentado en el espesor de la boca de salida y en el juego necesario entre ésta y la rueda, ó sea $\frac{z}{3} + 0{,}03$ m.: la velocidad debida á esta altura de caída es:

$$u = \sqrt{2g\left(\frac{z}{3} + 0{,}03\right.}$$

de donde

$$V^2 = \sqrt{V_0^2 + 2g\left(\frac{z}{3} + 0{,}03\right)} = \sqrt{2g\left(\frac{2z}{3} + 0{,}03\right)}$$

teniendo en cuenta que $V_0^2 = 2g \times \frac{z}{3}$.

Así se obtiene $V = 1{,}377$ para $z = 0{,}10$ y $V = 1{,}79$ para $z = 0{,}20$.

La relación indicada entre v y V no se verifica en la práctica, por las razones anteriormente expuestas; además, no permitiría dar á la rueda una velocidad v superior á 0,895, la cual sería insuficiente. Está generalmente comprendida entre 1

1,30 m. para atenuar los efectos que resultan de la excentricidad del centro de gravedad, que produciría variaciones periódicas de la velocidad, tanto más sensibles cuando menor sea ésta.

Conociendo la velocidad v, el número de vueltas se halla por la relación

$$n = \frac{v \times 60}{2 \pi R}.$$

El diámetro $2R$ de la rueda, viene dado por la expresión

$$2R = H - (z + 0{,}03).$$

La anchura l' de la rueda, debe ser mayor que la anchura l de la hucha para evitar que se pierda agua por los lados, y se tomará:

$$l' = l + 0{,}100.$$

El radio interior r de la corona, que permite determinar la altura $(R - r)$ de los canjilones, se deduce de la fórmula

$$Y = R \times \sqrt{1 - \frac{2Q}{K \times K' \times v \times l' \times R}}$$

en la que K es el coeficiente de llenado que puede estar comprendido entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, Q el gasto total por segundo, y K' un coeficiente para tener en cuenta el espesor de las paletas, que varía entre 0,90 y 0,99 m., según que el espesor varíe entre 25 y 5 mm.

Estas ruedas se emplean para caídas comprendidas entre 3 y 10 m.

No son convenientes más que cuando el caudal de agua es pequeño, porque no pueden consumir más de 150 litros por segundo y por metro de anchura, de modo que un gasto de 600 litros, exige una rueda de 4 metros de anchura que es el máximo que la práctica consiente.

La alimentación por vertedero exige además que el nivel de aguas arriba sea casi constante; no se puede, por lo tanto, hacer variar sensiblemente el gasto, y una rueda dispuesta así no conviene en los ríos de régimen variable y especialmente cuando se marcha por *esclusas*.

Además, la velocidad de esta rueda no pasa de 1,30 m. y en estas condiciones no puede servir de volante para regularizar la velocidad, cuando varía el trabajo de las máquinas movidas por ella. Esta pequeña velocidad exige, por otra parte, el empleo de órganos de transmisión complicados y costosos para dar á las máquinas accionadas por la rueda, velocidades convenientes.

Cuando el nivel de aguas abajo es variable, es necesario colocar la rueda enrasando con el nivel más alto del agua en el canal de desagüe, porque como se ve fácilmente, esta rueda se mueve en sentido opuesto al del movimiento del agua en este canal, y si la rueda se sumerge, no se vacía, sino que levanta el agua otra vez, causando una gran pérdida de trabajo y comprometiendo incluso la seguridad de la instalación.

Se puede evitar esto, haciendo dar una vuelta al canal de llegada del agua para producir la salida por delante de la rueda ó cambiando si no la di-

rección del canal de desagüe. La rueda puede entonces sumergirse 10 ó 12 cm. en las crecidas, puesto que gira en el mismo sentido en que el agua marcha en el canal de desagüe.

De cualquier manera que sea, esta rueda da un buen rendimiento que puede llegar y aun ser mayor del 80 por 100, pero para un salto dado, resulta la más grande y la más lenta de todos los tipos que pueden elegirse.

29. Rueda de paletas, de admisión superior y con compuerta.—Esta rueda se construye exactamente como la precedente, y el agua actúa de la misma manera, es decir, en virtud á la vez de su peso y de su potencia viva.

En lo que difieren esencialmente, es en el sistema ó manera de alimentarse: el canal, en lugar de estar libremente abierto en su extremo, lleva una compuerta *B* que puede subirse más ó menos regulando así la cantidad de agua que entra en la rueda (fig. 18), y parándola cuando se desea.

Durante la marcha, la compuerta está levantada hasta una cierta altura *E*: la altura *Z* del nivel del agua en el canal, por encima del umbral de la compuerta, es lo que suele llamarse *cabeza de agua*.

El umbral se prolonga por un vertedero, que tiene una ligera pendiente para compensar la resistencia de rozamiento y sobre el cual corre el agua, bajo la forma de una lámina de espesor uniforme *e*, reducido por la contracción al paso por la compuerta, del valor *E* al $e = 0{,}8\ E$.

La velocidad del movimiento del agua viene dada por la expresión

$$V_0 = \sqrt{2g\,(Z - e)} = \sqrt{2g\,(Z - 0{,}8\,E)}.$$

En la práctica, la altura E á que debe levantarse la compuerta es de 5 á 15 cm.

El rendimiento de esta rueda se obtiene por las mismas consideraciones que en el caso anterior:

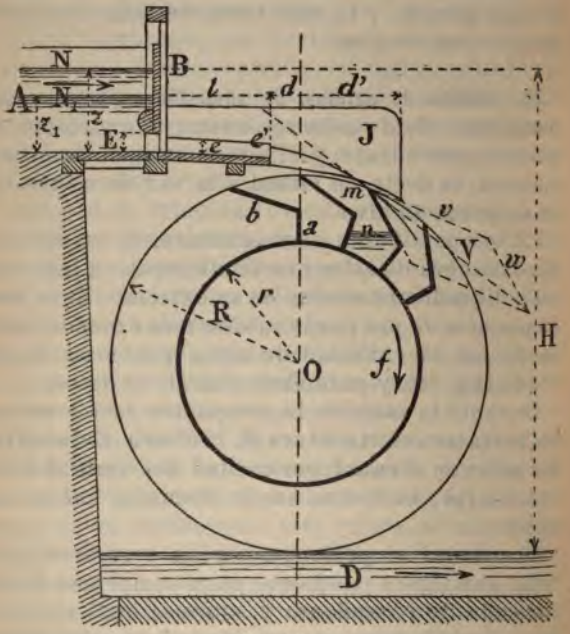


Fig. 18.

hay que agregar, sin embargo, la pérdida de caída $P \times i \times l$ que resulta de la diferencia de nivel entre el umbral y el extremo del vertedero saliente,

es decir, de la pendiente i y de la longitud l de este vertedero.

La altura Z que debe darse, depende del gasto de la corriente de agua y de las variaciones del nivel de aguas arriba. Para saltos comprendidos entre 3 y 8 m., Z debe variar entre 0,60 y 0,90 metros próximamente.

Si el nivel superior y el gasto son constantes, el gasto por segundo y por metro de anchura del receptor estará dado por la expresión

$$q = m\ E \times \sqrt{2g\,(Z - 0{,}8\ E)}.$$

Esta fórmula da valores de q comprendidos entre 116 y 143 litros para $E = 0.05$ y entre 322 y 410 litros para $E = 0{,}15$ cuando Z varía entre 0,60 y 0,90 metros.

Se tiene, para valor de la anchura l de la rueda:

$$l = \frac{Q}{q}$$

siendo Q el gasto total del receptor.

El valor de m puede tomarse, por lo menos, igual á 0,70 m. si la compuerta lleva, como indica la figura, una varilla semicilíndrica que reduzca la contracción.

Si el nivel de aguas arriba varía entre N_1 y N, y el gasto entre Q y Q' del estiaje á las aguas invernales, hay que imponer la condición de que la relación K entre los valores de la velocidad correspondientes á estos dos regímenes extremos, no pase de 2: se podrá, pues, establecer que

$$\frac{\sqrt{Z - 0{,}8\,E}}{\sqrt{Z_1 - 0{,}8\,E_1}} = K.$$

Se hace, por otra parte,

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{q'}{q} = K'$$

se podrá escribir:

$$q = m\,E_1 \times \sqrt{2g\,(Z_1 - 0{,}8\,E_1)}$$

$$K' \times q = q' = m\,E \times \sqrt{2g\,(Z - 0{,}8\,E)}$$

de donde se deduce, dividiendo estas dos expresiones miembro á miembro,

$$K' = K \times \frac{E}{E_1},$$

en la que se conocen K y E y se deduce E_1.

En cuanto al valor de Z viene dado por la relación

$$Z = \frac{K^2 \times d + 0{,}8\,E \times \left(\frac{K^2}{K'} - 1\right)}{K^2 - 1}$$

llamando d á la diferencia conocida $N - N_1$.

Conociendo Z se podrá determinar Z_1, así como q, q' y l por medio de las relaciones anteriores.

El diámetro de la rueda se obtiene por la fórmula

$$2R = H - (Z + i \times l + 0{,}03 \text{ m.})$$

en la cual 0,03 es la distancia vertical entre el extremo del vertedero y el vértice de la rueda.

La velocidad absoluta V de movimiento del agua en los canjilones de la rueda, varía de 3,330 á 4,016 m. para $Z = 0{,}60$ m. y $E = 0{,}15$ m. de una parte, y para $Z = 0{,}90$ m. y $E = 0{,}05$ m. por otra.

En cuanto á la velocidad v de la rueda, no puede llegar como máximo más que á la mitad de la velocidad absoluta de movimiento del agua, ó sea

$$v = \frac{V}{2};$$

esta velocidad varía, pues, en las condiciones antes citadas de 1,665 á 2,008 como valor máximo.

El número de vueltas n de la rueda por minuto se obtiene por la relación

$$n = \frac{V \times 60}{2\,\pi\,R}.$$

La anchura interior l' de la rueda, y la profundidad $(R - V)$ de los canjilones, se calculan lo mismo que en el caso anterior.

Este receptor se usa para caídas comprendidas entre 3 y 12 m. No debe, sin embargo, usarse para saltos menores de 4 metros.

La velocidad angular es, en este caso, relativamente grande, y la superficie libre del agua en las paletas afecta una curvatura muy pronunciada en virtud de la fuerza centrífuga, lo que determina el que se vacíen demasiado pronto.

Esta rueda conviene, particularmente siempre que el nivel superior ó el gasto de la corriente de agua sean variables: es muy á propósito para grandes caudales de agua, porque gasta próximamen-

te el doble de lo que consume una rueda sin compuerta ó *cabeza de agua*.

Por último, la mayor velocidad la hace preferible en la mayoría de los casos aunque su rendimiento sea menor; es, en efecto, de un volumen menos considerable, exige transmisiones menos complicadas, regulariza mejor la velocidad en las cargas variables y su instalación, por las razones citadas, es mucho más económica.

Cuando el nivel inferior es variable, se puede, sin embargo, sumergir la rueda 10 ó 12 centímetros adoptando una alimentación por un tubo curvo dispuesto sobre el fondo del canal por que llegan las aguas, y dirigiendo las láminas del agua de adelante á atrás de manera de invertir el sentido del movimiento de la rueda. En este caso, el muro de sostenimiento forma coraza en la base para retener el agua en los canjilones hasta el punto más bajo de la carrera del receptor.

30. Rueda de pecho con compuerta de persianas. — Esta rueda se caracteriza por el sistema de recibir el agua en los canjilones. La alimentación, en lugar de hacerse por la parte alta de la rueda, como en los casos anteriores, se hace por el costado un poco por encima del centro (fig. 19).

El canal de llegada, como en el caso de la rueda con compuerta superior, se termina por una hucha cerrada por un plano inclinado $B\,C$ que lleva una porción de orificios provistos de tubos J, J', cuyo cierre ó su apertura se regula por medio de la compuerta B.

Estos tubos ó canales, que han hecho que se dé á esta disposición el nombre de *compuerta de per-*

sianas, permiten dirigir el agua hacia los canjilones, según la dirección más favorable al buen rendimiento de la máquina.

La forma de los alabes ó canjilones puede ser análoga á la de las ruedas anteriores, pero entonces es necesario hacer unos orificios en la corona central *F*, para que el aire pueda salir por ellos cuando el agua entra.

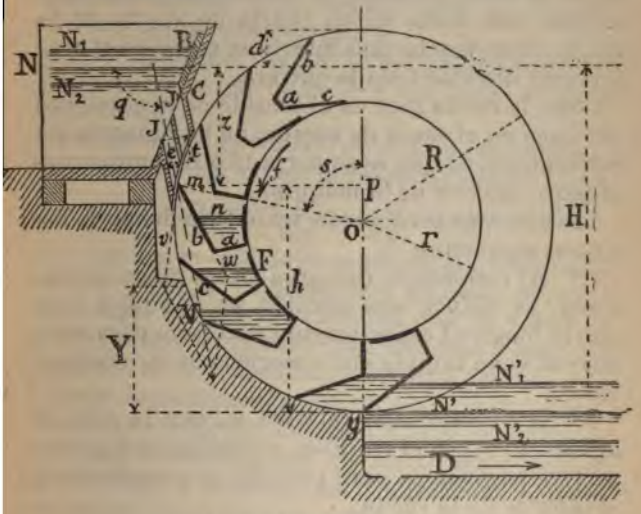


Fig. 19.—Rueda de pecho.

Se puede también suprimir la corona interior y formar la rueda con canjilones poligonales tales como el *a b c,* por ejemplo, *imbricados,* por decirlo así, unos en otros, quedando entonces naturalmente constituídos los orificios para la salida del

aire por los intervalos que quedan libres entre las caras interiores de dos canjilones consecutivos, y como además quedan estos intervalos muy altos, los canjilones pueden llenarse más completamente.

Esta rueda lleva necesariamente consigo el empleo de una coraza que venga desde la parte inferior hasta el suelo del canal de llegada del agua. Se ha de tener presente, en efecto, que puesto que el agua sólo actúa en un cuarto de vuelta de la rueda, tiene mucho más interés en este caso el conservarla durante toda la carrera.

Como la rueda gira en el sentido de la corriente del agua en el canal de escape, no hay ningún inconveniente en que se sumerja 10 ó 12 centímetros la parte inferior de la máquina.

Las diversas pérdidas de trabajo se deben á las causas siguientes:

1.ª Al rozamiento del agua en los tubos de entrada: se reduce esta pérdida no dándoles más que la longitud estrictamente necesaria para moldear la vena líquida en la sección de los conductos JJ';

2.ª A la velocidad relativa w, con la cual el agua penetra en el canjilón, velocidad cuya fuerza viva se gasta en pura pérdida en remolinos en el interior de la rueda;

3.ª A la pérdida de caída que resulta de la distancia vertical entre el punto m, en que el agua penetra en la rueda, hasta el n en que realmente actúa;

4.ª Al juego que existe entre la rueda y su coraza y que determina un escape de agua desde el momento en que el nivel del líquido pasa la aris-

ta del canjilón en c. Este agua se escapa sin producir ningún trabajo, puesto que no actúa por su peso sobre los canjilones;

5.ª Al rozamiento del agua que resbala sobre la coraza con la velocidad de arrastre v de la rueda;

6.ª A la pérdida de caída que resulta de que el agua contenida en el canjilón inferior cae en el canal de escape, para tomar el nivel N', sin desarrollar ningún trabajo útil; y

7.ª Por último, á la velocidad que tiene el agua al escaparse, y que no es otra que la de arrastre de la rueda.

Las pérdidas de trabajo debidas á las velocidades relativas w y v vienen respectivamente dadas por las expresiones $\frac{P w^2}{2g}$ y $\frac{P v^2}{2g}$. Ahora bien, hemos visto en el estudio de la rueda sin compuerta superior, que el valor mínimo de estas pérdidas tiene lugar cuando la velocidad v es la mitad de la proyección de la velocidad absoluta V sobre la dirección de la velocidad de arrastre misma.

Estas consideraciones permiten determinar, como anteriormente, la forma más racional que se debe dar á los canjilones. En efecto; estando dada la velocidad V en magnitud y dirección, bastará proyectar esta velocidad sobre la tangente en m, por ejemplo, y tomar para w la mitad de esta proyección; se construirá así el paralelogramo de las velocidades y se obtendrá la velocidad relativa w que determinará la dirección misma de la pieza b del canjilón.

En estas condiciones, la velocidad relativa del agua, á su entrada en la rueda, siendo por cons-

trucción paralela á la pared exterior del canjilón, el agua entrará en él sin choque.

Las pérdidas de trabajo debidas á los dos casos de reducción de altura á la entrada y á la salida de la rueda, en el canjilón más alto y en el más bajo, dependen de que estén más ó menos llenos, y por consiguiente, de su altura, que es próximamente igual á $(R - r)$, diferencia de los radios exterior é interior de la rueda. Hay que hacer, pues, que esta diferencia sea lo menor posible dentro de las condiciones anteriormente especificadas.

En cuanto á la pérdida por el juego de la coraza, es evidente que crece con la anchura de este juego y con la velocidad de la rueda; conviene, pues, desde este punto de vista, no adoptar una gran velocidad de rotación y reducir cuanto se pueda la anchura del juego, la cual no puede ser prácticamente inferior á 0,005 metros.

Por último, la pérdida que resulta del rozamiento del agua retenida por la coraza depende de su longitud y del cuadrado de la velocidad de la rueda; de aquí resulta que hay interés en no adoptar un coeficiente de llenado demasiado grande, ni una velocidad excesiva para la rueda.

Si se tienen en cuenta estas diversas causas de pérdidas, atenuadas de manera de reducir sus efectos al mínimum, se encuentra que el rendimiento de la rueda de pecho varía entre 65 y 70 por 100, según la altura total de caída H y los valores adoptados para la velocidad absoluta V y para el ángulo que forme esta velocidad con la de la rueda.

Este receptor se aplica para saltos comprendidos entre 2,50 y 4 metros; conviene, especialmente

para caídas pequeñas, en casos en que las ruedas de admisión superior no podrían emplearse y principalmente cuando el nivel superior, el gasto y el nivel inferior son variables, como en la marcha por exclusas.

Se abre un número variable de orificios según la altura del nivel superior y el caudal que se pueda gastar.

Si se designa por q el gasto por segundo y por metro de anchura correspondiente á las aguas invernales y al nivel superior N_1, por Z_1 la altura de la lámina de agua comprendida entre el nivel N_1 y la base del tubo y por E_1 la sección transversal de la lámina de agua que alimenta la rueda, se tendrá la relación

$$q = m \times E_1 \times \sqrt{2g \times Z_1}$$

en la cual m es el coeficiente de contracción, que puede variar entre 0,75 y 0,85, según la forma de los tubos de entrada del agua.

Del mismo modo tendremos para el estiaje y el nivel N_2, haciendo como antes $q' = K \times q$ para el gasto correspondiente,

$$K \times q = m \times E_2 \times \sqrt{2g \times Z_2}.$$

Se puede fijar arbitrariamente E_1 y deducir E_2, siempre que los dos valores estén comprendidos entre 0,60 metros y 0,20 metros.

Se debe, además, observar una cierta relación entre E_1 y E_2, de manera que las velocidades ex-

tremas de movimiento V no se diferencien demasiado en los dos casos; esta relación en función de K es la siguiente:

$$\frac{K}{K'} = \frac{E_1}{E_2}$$

en la cual K' es arbitrario, pero no debiendo ser mayor que el núm. 2.

Habiendo determinado E_1 y E_2 por estas diversas consideraciones, se podrán, si se da el gasto q, calcular los valores de Z_1 y Z_2 por las relaciones anteriores. En general, se adopta para altura de la cabeza de agua, medida hasta el nivel medio de aguas arriba N, el valor 8,46 metros, que corresponde á $V = 3$ metros.

Para determinar el radio R de la rueda se usa la fórmula empírica

$$2R = H + 1 \text{ metro.}$$

El ángulo del elemento exterior del canjilón con la tangente á la circunferencia en el punto m, por ejemplo, está generalmente comprendido entre 25 y 30 grados.

La velocidad absoluta á la salida de las paletas está dada por la relación

$$V = \sqrt{2g \times Z.}$$

Para encontrar su dirección, basta construir con la tangente que da la dirección de la velocidad v, un ángulo tal que la pendiente de esta dirección

con relación á V sea la mitad de la pendiente de la misma dirección con relación al elemento $b\,m$ del canjilón. Esta construcción corresponde á las condiciones de rendimiento máximo de la rueda.

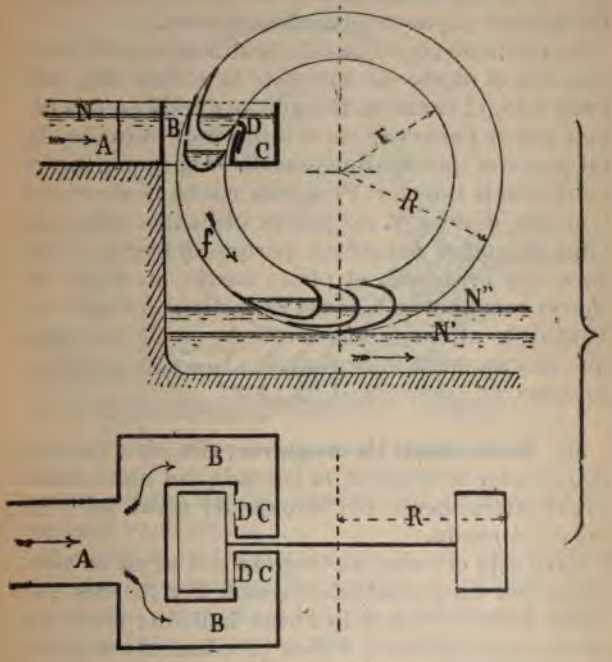


Fig. 20.—Rueda Millot.

Se obtendrá entonces v como hemos visto antes, tomando la mitad de la proyección de V sobre la dirección de v. El número de vueltas se deducirá fácilmente por la relación

$$n = \frac{v \times 60''}{2\pi \times R}.$$

En cuanto á la anchura l y á la profundidad $(R - r)$ de los canjilones, se obtendrán por el mismo método expuesto precedentemente.

La rueda de pecho ha sido modificada por M. Millot, con el objeto de suprimir la coraza (fig. 20). Para esto, el canal de llegada se divide en dos ramas que se encurvan en el interior de la rueda, de tal manera, que la alimentación se hace por la circunferencia interior. Pero esta rueda es de construcción costosa y no puede utilizarse más que para pequeñas potencias, porque debiendo colocarse los brazos en el plano medio, en lugar de fijarse como antes, á causa de la disposición de las luchas de alimentación, no se la puede dar más que una anchura muy limitada, de 1,50 metros á lo sumo.

31. Rueda lateral sin compuerta.—En este sistema de receptor hidráulico, la entrada del agua tiene lugar lateralmente por debajo del nivel del centro de la rueda.

Para esto el canal de llegada del agua se prolonga por un *encachado circular k* y las dos paredes laterales tienen la forma indicada en *h*. La rueda tiene paletas ó álabes propiamente dichos *c* y contrapaletas *f*, no existiendo juego ninguno, de modo que el agua que entra en la rueda queda sostenida por los álabes, por la solera y por la prolongación de las paredes laterales del canal.

Hay además una *contracompuerta* ó *cuello de cisne*, de fundición, que está alojado en una fosa y

sujeto contra las paredes del canal, sobre el cual resbala la compuerta *a* que puede subir ó bajar, siguiendo las variaciones del nivel superior. Esta compuerta hace el papel de vertedero, dejando

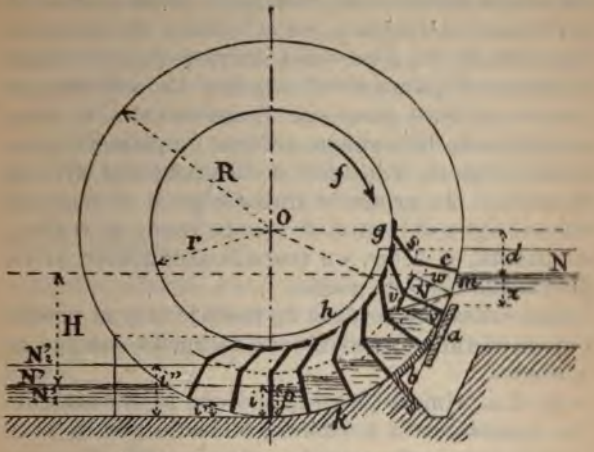


Fig. 21.—Rueda lateral sin compuerta

pasar el agua de alimentación por encima, con un espesor variable *z*.

La altura del centro *O* de la rueda, por encima del nivel de aguas arriba, varía entre 0,50 m. como mínimum para las caídas más grandes y 1 metro como máximo para las más pequeñas.

Se ve que el agua contenida en los álabes se coloca en equilibrio á niveles diferentes, de tal manera, que los álabes forman, dos á dos, vasos comunicantes, estableciéndose la comunicación por el juego que existe á todo alrededor del álabe, correspondiente á la altura *p* del agua en el álabe.

Se tendrá presente también que un cierto número de paletas, situadas á la izquierda del diámetro vertical de la rueda, están sumergidas en el canal de desagüe. Ahora bien; el nivel del canal de escape puede estar, bien en N' á la misma altura que el del agua p, en el interior de las paletas, bien en N'_1 á un nivel inferior que el citado, ó bien en N'_2 á un nivel superior. Es evidente que los dos últimos casos son desfavorables al buen rendimiento de la rueda, porque, en primer lugar, el agua cae en el interior de la rueda del nivel p al nivel i' sin producir trabajo; y en el segundo caso el agua del canal de escape opone un trabajo resistente, es decir, un trabajo antagónico al esfuerzo motor de la rueda.

Las causas de pérdida de trabajo que se producen en el funcionamiento de la rueda son las siguientes:

a) La primera pérdida se debe al frotamiento del agua sobre el vertedero formado por la compuerta; pero esta pérdida, que depende del cuadrado de la velocidad relativamente pequeña del agua que se mueve, es enteramente despreciable.

b) La segunda pérdida se debe á la velocidad relativa w, con la cual entra el agua en la rueda; esta velocidad relativa se disipa en remolinos y sólo una pequeña parte de la energía correspondiente se recoge por la contrapaleta inclinada s, por la cual sube el agua, gastando una fracción correspondiente de su fuerza viva; pero se puede considerar que la energía $\frac{P w^2}{2g}$ correspondiente á á esta velocidad se pierde en totalidad en la práctica.

c) La tercera pérdida de energía resulta de que el agua pasa de un canjilón al siguiente por el juego que queda entre las diversas partes de la rueda.

d) La cuarta pérdida se debe al rozamiento del agua contra la coraza de la rueda; esta pérdida es proporcional al cuadrado v^2 de la velocidad de arrastre de la rueda y á las dimensiones de la coraza y de la rueda, ó lo que es lo mismo, al radio.

e) La quinta pérdida resulta de que el agua sale de los álabes con la velocidad v de la rueda; la energía inutilizada por esta causa es, por lo tanto, igual á $\frac{P v^2}{2g}$.

f) Por último, una pérdida más de energía se debe á la insuficiencia de inmersión de la rueda ó al exceso de inmersión, como hemos hecho ver antes.

Si, en efecto, el nivel i' es inferior á p, la pérdida que se debe á la diferencia de caída es

$$P\,(p - i').$$

Si, por el contrario, i'' es superior á p, la rueda ejerce una acción sobre el líquido del canal inferior, que á su vez acciona sobre la rueda para oponerse á su movimiento; la pérdida de trabajo que resulta de este exceso de inmersión depende del valor del exceso y de la velocidad de la rueda.

Estas últimas pérdidas se producen siempre que, á causa de las variaciones del nivel de abajo, la altura i del agua en el canal de escape es inferior ó superior á la altura p del agua dentro de las paletas de la rueda.

La suma de las pérdidas debidas á las causas b y e es igual á $\frac{P}{2g}(w^2+v^2)$; el mínimo de esta expresión varía según que se imponga la velocidad v de la rueda, ó, por el contrario, que se de V, ó lo que es lo mismo, el espesor z de la lámina de agua por encima de la cresta del vertedero.

En el primer caso, el mínimo tiene lugar cuando la velocidad V es igual á la proyección de v sobre su propia dirección: en este caso, la velocidad relativa w es perpendicular á V y el álabe, que debe ser paralelo á w, se aproxima á la dirección vertical, lo cual es una condición muy desfavorable á su inmersión.

En el caso en que se de V, la condición del mínimo corresponde á que la velocidad v de arrastre de la rueda sea igual á la mitad de la proyección de V sobre su propia dirección, lo que da el medio de trazar la paleta, siempre paralela á la dirección de la tercera velocidad w.

En realidad, la paleta no es vertical ni tampoco oblícua como resultaría de esta última construcción: se dirige ordinariamente la parte exterior según el radio, es decir, en una dirección intermedia con relación á las dós precedentes; las tres velocidades forman entonces un triángulo y la velocidad v se hace igual á la proyección total de V sobre su dirección; se tiene, por consiguiente, para la pérdida considerada, en virtud de la relación geométrica entre los tres lados de un triángulo rectángulo:

$$\frac{P}{2g}(w^2+v^2)=\frac{PV^2}{2\,2}.$$

Se hace mínima la pérdida *(c)* reduciendo lo más posible el juego que existe entre la rueda y su coraza; pero no se puede bajar de 4 á 5 mm. porque podría suceder que, si no se deja juego suficiente, el rozamiento fuera mucho mayor con la parte fija de la construcción.

Hemos visto que la pérdida *(d)* disminuye con el radio de la rueda y la velocidad v. Es evidente que, puesto que se trata de un trabajo perdido, absorbido por el rozamiento, se reducirá esta pérdida al mínimo haciendo el fondo de la coraza tan regular y tan liso como sea posible.

La velocidad absoluta V de entrada del agua en el canjilón depende de la altura z del espesor de la lámina de agua. Si el vertedero es en pared delgada como en el caso de la figura 21, la fórmula que da la velocidad será:

$$V = \sqrt{2g \times 0{,}57\, z}$$

en la cual se introduce el coeficiente 0,57 que da la experiencia.

Si la compuerta, por el contrario, forma un vertedero en pared gruesa, como en el caso de la rueda de admisión superior, sin compuerta ó cabeza de agua, se tomará la relación

$$V = \sqrt{2g \times \frac{z}{3}}.$$

En la práctica los valores de z deben estar comprendidos entre los límites de 18 á 30 cm.

El gasto por metro de anchura del vertedero y por segundo, viene dado por la relación

$$q = m\,z \times \sqrt{2\,g\,z}$$

en la que m es un coeficiente de contracción que, para la compuerta representada en la figura antes citada, vale 0,41; este coeficiente es igual á 0,45 cuando se reviste la compuerta de una chapa de palastro recurvada, y baja á 0,385 cuando el espesor del vertedero es por lo menos igual á 1,5 z.

Cuando los valores de z varían entre 18 y 30 centímetros, los valores de q varían entre 130 y 327 litros, según la naturaleza del vertedero.

El radio de la rueda, como se ve en la figura, es:

$$R = d + H + i.$$

Se darán primero aproximadamente d é i y conociendo z, se deducirá la posición del filete medio que está 0,57 z por debajo del nivel de aguas arriba para un vertedero en pared delgada y á $\frac{2}{3}z$ para un vertedero en pared gruesa.

Se traza entonces por puntos la parábola del filete medio, y la tangente en el punto en que esta parábola corta á la circunferencia exterior de la rueda, da la dirección de la velocidad absoluta V del agua á su entrada en el álabe. La velocidad v de la rueda se deduce, como hemos visto anteriormente, por el triángulo de las tres velocidades.

La profundidad $(R - r)$ se obtendrá por la relación

$$Q = 0{,}90 \text{ á } 0{,}95 \times K \times l \times (R^2 - r^2) \times \frac{v}{2\,R}$$

en la que Q es el gasto por segundo y K un coefi-

ciente que varía entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ y que es el tanto por ciento que se llena el canjilón.

Se deduce $(R - r)$ de esta relación y se comprueba en seguida si p es igual á i sabiendo que se tiene que

$$p = 0{,}90 \text{ á } 0{,}95\ K \times (R - r).$$

Si p es diferente de i, se vuelve á empezar el cálculo, haciendo una nueva hipótesis sobre el valor de i hasta que se llegue á satisfacer á la condición $i = p$. Esta condición, además, deja de llenarse cuando el nivel inferior varía, resultando necesariamente pérdidas de trabajo.

Las ruedas laterales se usan para caídas comprendidas entre 1 m. y 2,60 m. Son muy convenientes cuando el nivel superior varía poco, aunque se puede también evitar el inconveniente que resulta de una elevación notable del nivel, empleando una compuerta circular cuya coronación se encuentre, por consiguiente, siempre muy cerca de la circunferencia exterior de la rueda, que es lo que conviene.

La velocidad de esta clase de ruedas varía entre 1 m. y 1,50 m.; esta velocidad, relativamente pequeña, hace conveniente este modelo de receptor en el caso de fábricas de resistencia poco variable, como son los molinos, las fábricas de hilados, las elevaciones de agua, etc.

El rendimiento varía entre 0,60 y 0,75 m. para alturas del salto comprendidas entre 1 m. y 2,50 metros.

32. Rueda lateral con compuerta.—Esta rueda está

construída como la rueda lateral sin compuerta, pero el canal de llegada del agua termina en este caso en una compuerta de fondo *b* (fig. 22), bajo la cual pasa el agua para entrar en la rueda.

Esta compuerta se mantiene á una cierta distancia *e* del suelo, de tal manera que la sección de la lámina de agua que alimenta la rueda sería $l \times e$, si no hubiese que tener en cuenta un cierto coefi-

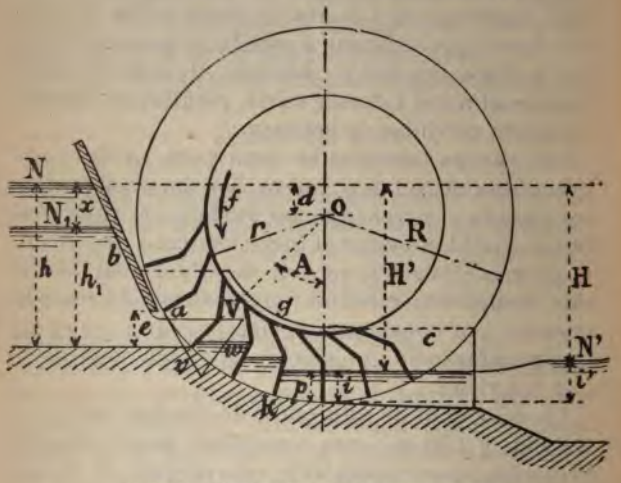


Fig. 22.—Rueda lateral con compuerta.

ciente de contracción al paso del agua por debajo de la compuerta. Para reducir todo lo posible esta contracción, conviene que la compuerta esté inclinada y que su borde inferior sea casi tangente á la circunferencia de la rueda.

El umbral del suelo debe estar ligeramente in-

clinado hacia la rueda para que el agua conserve la velocidad que toma á su paso por debajo de la compuerta.

La cabeza de agua h está constituída por la altura total de la masa de agua en el canal de llegada.

En la figura puede observarse que el suelo k se prolonga por una parte recta ligeramente inclinada hacia aguas abajo hasta la terminación de los muros laterales c, y que después la inclinación aumenta muy rápidamente hasta llegar al lecho del río; esta disposición tiene por objeto el determinar un resalto superficial que permita al agua elevarse delante de la rueda, dejando el nivel dentro de las paredes c á un nivel inferior.

Las pérdidas de trabajo que se producen en el funcionamiento de esta rueda son análogas á las que hemos indicado en el caso anterior.

La primera pérdida, debida al rozamiento del agua al pasar por debajo de la compuerta y sobre el umbral del suelo, es una pequeña fracción del trabajo correspondiente á la velocidad V, cuya carga generatriz, tomada sobre el filete medio, es $(h - 0{,}8\ e)$.

La segunda, debida á la velocidad relativa w de entrada del agua en la rueda, es siempre igual á $\frac{P\,w^2}{2\,g}$.

La tercera pérdida se refiere al movimiento del agua al pasar por el juego que existe entre la rueda y su coraza.

La cuarta al frotamiento del agua contra la coraza.

En quinto término hay que citar otra pérdida

igual á $\frac{P v^2}{2g}$, debida á que el agua abandona la rueda conservando una velocidad v.

Se puede tener por último, como hemos visto en el caso precedente, una pérdida debida á insuficiencia ó exceso de inmersión.

Hemos visto que, en este caso, cuando se trata de hacer mínima la suma de las pérdidas expresadas por $\frac{P}{2g}(w^2 + v^2)$, imponiéndose la velocidad v de la rueda, se llega á dar á la paleta una dirección muy desfavorable para su inmersión. En el caso que nos ocupa esta condición llevaría á una dirección de las paletas todavía más inadmisible que en la rueda estudiada anteriormente. Se dará, pues, siempre, en el caso actual, la velocidad V del agua al entrar en la rueda, que es la misma que á su paso por debajo de la compuerta, lo cual equivale á dar la altura h, generatriz de la velocidad V.

Aquí conviene trazar la paleta siempre paralela á la dirección de la velocidad relativa w; en efecto, si se da á la parte exterior la dirección del radio, como hacen muchos constructores, la pérdida de trabajo considerada resulta igual, como hemos visto, á $\frac{P V^2}{2g}$, es decir, que corresponde á una pérdida de caída igual á toda la altura generatriz de la velocidad absoluta del agua.

Ahora bien: esta altura generatriz no es más que una fracción relativamente pequeña de la caída total, en el caso de la rueda sin compuerta, mientras que cuando la hay puede llegar á los dos tercios de la caída, es decir, ser una pérdida de una importancia considerable.

El rendimiento de estas ruedas varía de 0,40 á 0,55, según la altura de caída de que se disponga.

La altura h crece con la altura del salto, pero no proporcionalmente, sino más despacio; así, por ejemplo, para el valor de H igual á 1 m., h será igual á los $^2/_3$, es decir, á 0,70; para $H=2$ m., la altura h será próximamente 0,90 m., ó sea los $^9/_5$, poco más ó menos, de H.

Cuando el nivel superior varía, es absolutamente necesario variar la elevación de la compuerta, sea e esta altura para el nivel más elevado N, y e_1 para el nivel inferior N_1.

Se tendrá, adoptando las mismas notaciones que anteriormente, en casos análogos,

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{q_1}{q} = K$$

$$K\,q = q_1 = m \times e_1 \times \sqrt{2\,g\,(h_1 - 0{,}8\,e_1)}$$

$$q = m \times e \times \sqrt{2g\,(h - 0{,}8\,e)}$$

y

$$\frac{q_1}{q} = \frac{e_1}{e} \times \frac{\sqrt{h_1 - 0{,}8\,e_1}}{\sqrt{h - 0{,}8\,e}}.$$

Hagamos para simplificar

$$\frac{\sqrt{h - 0{,}8\,e}}{\sqrt{h_1 - 0{,}8\,e_1}} = K'$$

de donde se deduce

$$K = \frac{e_1}{e} \times K' \text{ ó } \frac{e_1}{e} = \frac{K}{K'}.$$

Se da la cantidad K' que debe quedar comprendida entre 0,60 y 0,90, y se deduce la relación $\frac{e_1}{e}$ que permite calcular e_1 ó e, según que se conozca una ú otra de estas incógnitas. El valor de la elevación de la compuerta debe, por otra parte, estar siempre comprendido en la práctica entre 0,20 y 0,40 m.

Una vez hecho este cálculo se obtendrá h por la fórmula

$$h = \frac{x \times 0{,}8\, e \times \left(\frac{K}{K'} - K'^2\right)}{1 - K'^2}$$

siendo x la diferencia conocida de los dos niveles extremos N y N_1.

Se deducirá h_1 así como q y q_1. En cuanto al coeficiente m de contracción, depende de la inclinación de la compuerta y varía entre 0,74 y 0,80, cuando esta inclinación disminuye de 63 á 45°.

Para los valores extremos de h y de e el gasto por segundo y por metro de anchura de una rueda con compuerta es, como mínimum,

$$q = 0{,}74 \times 0{,}20 \times \sqrt{2g\,(0^m60 - 0{,}8 \times 0^m20} = 0^m435$$

y como máximo

$$q_1 = 0{,}80 \times 0{,}40 \times \sqrt{2g\,(1\text{ m.} - 0{,}8 \times 0{,}40)} = 1{,}172.$$

Cuando el nivel superior varía, la velocidad de entrada del agua en la rueda aumenta ó dismi —

nuye, y con ella la velocidad de la rueda misma. Si las máquinas movidas por el motor hidráulico exigen una velocidad constante, hay que mantener V constante. Para esto se sustituye la compuerta única por otras dos, provistas cada una de un mecanismo para levantarlas independientemente; se maniobran entonces estas dos compuertas, de manera que se mantenga el centro del orificio á una altura constante, generatriz de la velocidad, por debajo de los diversos niveles de aguas arriba.

En lo que se refiere al diámetro que se adopte para la rueda, hay que tener en cuenta que un diámetro grande favorece al rendimiento; en la práctica este diámetro está comprendido entre 3,50 y 7 m.

La velocidad v de la rueda varía entre 1,80 y 3 metros.

La profundidad de las paletas puede oscilar entre 0,40 y 1 m. cuando el gasto es muy variable.

Se fija la posición del centro de la rueda de tal manera que se realice la condición $i = p$ para las aguas medias.

Siendo la velocidad de esta clase de ruedas por lo menos doble que en las anteriores, la pérdida debida á la velocidad del agua al salir de la rueda, y que es proporcional al cuadrado de la velocidad, es, por lo tanto, cuatro veces más grande que en el primer caso. Por esto es interesante utilizar esta velocidad para volver á elevar el agua hasta la altura del nivel de abajo, formando así un resalto superficial.

Dedúcese de aquí que la rueda en marcha funciona realmente como si la caída fuera

$$H + i' - i = h,$$

es decir, una caída mayor que H.

Se puede llegar así á ganar la mitad de la altura correspondiente á la velocidad v, ó sea $\frac{1}{2} \times \frac{v^2}{2g}$ con lo cual esta ganancia puede llegar, y aun pasar, del 10 por 100.

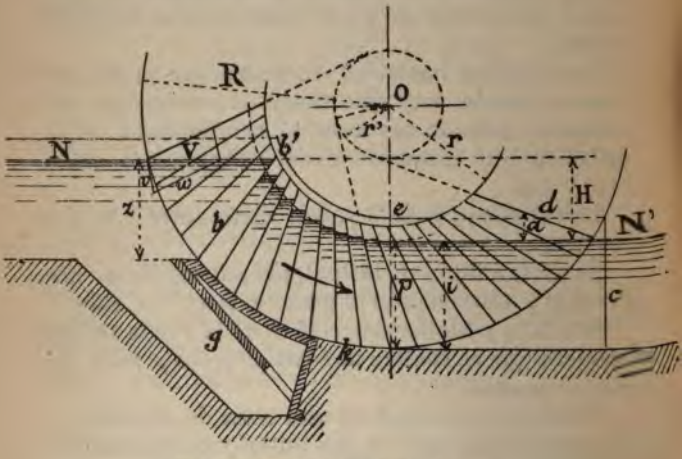


Fig. 23.—Rueda lateral Sagebien.

La rueda lateral con compuerta se emplea en el caso en que el nivel superior y el gasto son muy variables, cuando el volumen que hay que gastar por segundo es muy grande, porque la rueda de este tipo es menos voluminosa para igual consumo, á causa de su gran velocidad; cuando la potencia de la caída es excesiva, por las mismas razones,

dado que en este caso se puede sacrificar en parte el rendimiento, y por último, cuando hay que vencer resistencias variables, porque como la rueda es muy grande hace el oficio de volante.

33. Rueda lateral Sagebien ó rueda-sifón.—Las paletas *b*, de esta rueda son planas y no están dirigidas según el radio, sino tangencialmente al cilindro horizontal concéntrico al eje de la rueda que se ve en la figura 23.

El espesor de la corona de paletas es relativamente grande, y cada paleta forma una especie de vaso abierto de arriba á abajo, en el cual penetra el agua, por decirlo así, por inmersión.

La rueda gira en una coraza circular *k* prolongada por un cuello de cisne contra el cual se desliza una compuerta que puede sumergirse *g*. Esta compuerta, en su posición más baja, enrasa generalmente con el nivel del suelo del canal de llegada del agua.

Se ve que las primeras paletas sumergidas en el canal de llegada actúan como vasos comunicantes en los cuales el agua toma el mismo nivel *N* que en el canal de entrada, porque el agua penetra, en efecto, en la rueda con una velocidad sensiblemente igual á la de la corriente en el canal, y como esta velocidad es siempre muy pequeña, las paletas se van sumergiendo sucesivamente en el agua sin sufrir una resistencia sensible.

Desde que la paleta ha llegado á la posición *b*, el orificio inferior tiende á ser obturado cada vez más por el cuello de cisne, acabando por interrumpirse la comunicación con el canal de llegada del agua.

Si se desprecia la pérdida por el juego que existe entre la rueda y su coraza, el vaso constituído por las paletas queda lleno de agua hasta que este vaso baja á un punto situado en la vertical que pasa por *O*, en el cual el nivel del agua será ya el *N'* del canal de escape.

A partir de esta posición, el agua no desarrolla ya fuerza motriz que pueda actuar sobre las paletas, y al continuar el movimiento de la rueda, el vaso emerge poco á poco del canal de salida y se vacía por completo al llegar á *d*.

El agua se transporta, por lo tanto, del canal de llegada al de salida por intermediación de las paletas de la rueda que funciona como un contador de agua cuyo consumo es proporcional á la velocidad del órgano móvil.

Se verá que la posición inclinada de las paletas es poco favorable á su emersión del lado del canal de salida, pero como la velocidad de esta rueda apenas pasa de 0,60 á 0,80 m. por segundo en la circunferencia exterior, esta emersión se hace sin resistencia sensible de la parte del agua.

Las pérdidas de energía que se producen en esta rueda son análogas á las que hemos estudiado anteriormente.

En lo que se refiere á la pérdida que depende de la cantidad $(W^2 + v^2)$, se reduce al valor $\frac{P \times v^2}{2g}$ cuando se coloca en las condiciones más favorables al buen rendimiento, y en el caso en que se da la velocidad v de la rueda.

Ahora bien, como v no es nunca superior á 0,80 metros, aun suponiendo esta velocidad extrema, la altura de caída correspondiente será solamente

igual á

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{0{,}8}{2 \times 9{,}81} = 0{,}032 \text{ m.}$$

Para una caída $H = 1$ m., la pérdida sería, por lo tanto, sensiblemente igual á 3 por 100, por esta causa.

Como las pérdidas de trabajo que resultan del juego y del frotamiento del agua sobre la coraza son respectivamente proporcionales á la velocidad v y al cuadrado v^2 de esta velocidad, se ve que estas pérdidas se reducen todo lo posible en la rueda Sagebien, cuya velocidad es siempre relativamente pequeña.

Se deduce de aquí que el rendimiento práctico de esta rueda es muy grande y varía, según la altura de la caída y las dimensiones de la rueda, entre 0,80 y 0,90 m.

La velocidad media u de la corriente en el canal de llegada está comprendida entre 0,40 y 0,60 metros, y es conocida en todos los casos, de modo que se puede fácilmente determinar el espesor Z de la lámina de agua. El canal de llegada del agua es rectangular y su anchura l se determinará, por consiguiente, por la relación $l = 2\,Z$ que corresponde, como sabemos, á la pérdida mínima por metro, necesaria para vencer el rozamiento del agua contra las paredes.

Sea Q el gasto por segundo: como la sección de paso del agua sobre la compuerta es $l \times Z$, se tendrá

$$Q = l \times Z \times u$$

y sustituyendo l por su valor $2\,Z$

$$Q = 2\,Z^2 \times u$$

de donde

$$Z = \sqrt{\frac{Q}{2\,u}}$$

pudiendo ser Z sin inconveniente igual, ó aun mayor que 1,50 m.

Si el nivel de aguas arriba ó el caudal del río son variables, habrá que subir ó bajar la compuerta, según convenga.

El radio R de la rueda está comprendido entre 3 y 6 m., según la altura de la caída, la importancia del caudal y las variaciones de este caudal y las del nivel inferior. En todos los casos, el ángulo a que forma la dirección de la paleta d á su emergencia con el nivel N' no debe ser inferior á 30 grados.

Una vez escogida la velocidad v, como la velocidad V de entrada del agua en la rueda, es horizontal y próximamente igual á u, velocidad en el canal de entrada, se trazará el paralelogramo de las velocidades en el punto en que el nivel superior N corta á la circunferencia exterior de la rueda, y se obtendrá así la velocidad relativa W que dará la dirección de la paleta y determinará, por consiguiente, el radio del cilindro al cual deben ser trazadas tangencialmente las paletas.

El número de vueltas de la rueda por minuto es, según la fórmula general,

$$n = \frac{60 \times v}{2\,\pi\,R}$$

Como este número de vueltas es proporcional á la velocidad tangencial de la rueda, que es muy

pequeña é inversamente proporcional al radio, que es, por el contrario, relativamente grande, se ve que la rueda Sagebien sólo tiene una pequeña velocidad angular. El número de vueltas apenas pasa de 2,5 y puede bajar hasta una por minuto.

La profundidad $(R - r)$ del rodete ó corona, teniendo en cuenta el lugar ocupado por el espesor de las paletas, se calcula por la fórmula

$$Q = 0{,}90 \text{ á } 0{,}95\,(R^2 - r^2) \times \frac{v}{2R}.$$

Será necesario en todos los casos que el valor encontrado para $(R - r)$ y por consiguiente para R, sea tal que la paleta b, cuyo extremo inferior corresponde á la coronación de la compuerta, tenga su extremo b' situado á 0,05 ó 0,10 m. por encima del nivel más elevado de aguas arriba con el objeto de que el agua del canal de llegada no pueda desbordarse en el interior de la rueda.

Esta rueda da lugar, como las demás ruedas sumergidas, á pérdidas de trabajo que resultan, sea de la insuficiencia, sea del exceso de inmersión, cuando, por consecuencia de la variación del nivel de aguas abajo y del caudal, la altura p del agua en la parte baja del rodete es mayor ó menor que la altura i del agua en el canal de escape.

El número de paletas se determina por la relación

$$N = \frac{2\pi R}{E}.$$

El espacio E entre las paletas, medido sobre la circunferencia de la rueda, debe estar comprendido entre 0,35 y 0,40 m.

Conviene, además, que el número de paletas sea un múltiplo exacto del de trazos de la rueda.

La rueda Sagebien es aplicable á caídas pequeñas de 0,60 á 2,60 m., y es conveniente cuando el caudal es muy grande.

El gasto por segundo y por metro de anchura varía, en efecto, de 0,700 á 1,300 m^3, según la velocidad, la profundidad de las paletas y el diámetro.

Está caracterizada por su pequeña velocidad angular y está indicada, por lo tanto, para las fábricas en que se emplean máquinas de poca marcha y trabajo constante.

El gasto de esta rueda es proporcional á su velocidad: es, pues, muy conveniente para elevaciones de agua, porque el trabajo de las bombas es proporcional á la velocidad, y por consiguiente, al trabajo motor de la rueda hidráulica.

Es, por el contrario, poco á propósito para mover un laminador, por ejemplo, porque la resistencia y la velocidad son muy variables en estas máquinas, como se comprende desde luego.

Por otra parte, la pequeña velocidad de esta rueda obliga en muchos casos á establecer transmisiones de movimiento costosas que absorben una parte del trabajo suministrado por el motor y compensan en parte la ventaja de su elevado rendimiento. Por último, resultan muy caras por sus grandes dimensiones y por la profundidad de las paletas.

34. Ruedas de admisión inferior con paletas planas. — Las paletas de esta rueda están dirigidas hacia el centro y no hay ni contrapaletas ni juegos laterales, girando la rueda entre el suelo *S* y las dos paredes laterales *j* (fig. 24).

La compuerta que limita el canal de entrada tá inclinada próximamente 45 grados sobre el rizontal, y de tal manera, que la parte inferior té todo lo más aproximada posible á la llanta de rueda.

El agua pasa, por tanto, por *e* debajo de la com- ierta, se desliza después por un suelo un poco in-

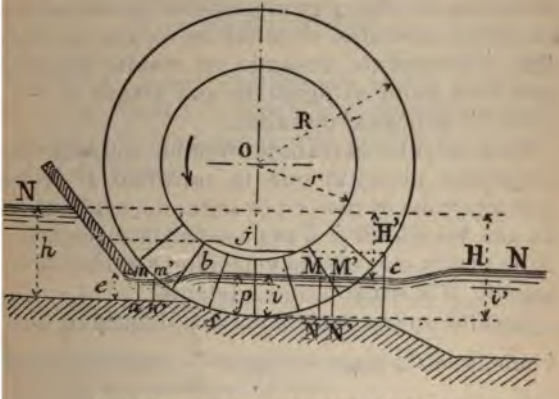


Fig. 24.—Rueda de admisión inferior.

inado y entra en la rueda sin pérdida de veloci- ad. Esta velocidad *v*, debida á la altura de la lá- ina *h*, se reduciría por el rozamiento del agua ntra el suelo si no se compensase esta pérdida n la pequeña altura que se gana al dar inclina- ón al suelo.

El agua sube por las paletas hasta una cierta al- ra *p*, que es sensiblemente igual á la inmersión *i* el canal de salida.

Gracias al ajustamiento de la rueda con el suelo

se evita la comunicación directa entre el canal superior y el inferior, durante todo el recorrido correspondiente al trabajo de las paletas, es decir, hasta que la paleta considerada haya llegado á la posición vertical.

La corona circular se prolonga por una solera ligeramente inclinada para que el agua conserve la velocidad que tiene al salir de la rueda; á continuación de ella, y en el punto en que se terminan los muros laterales, el canal de escape se profundiza bruscamente, creando un resalto superficial que hace subir el agua, de una altura $(i' - i)$ al nivel N' del canal de salida.

Para calcular el trabajo obtenido con esta rueda, tendremos presente que la cantidad P de agua que atraviesa el motor por segundo, está animada de una velocidad V á su paso por la sección $m\,n$ y no le queda más que la velocidad reducida v en la sección $M\,N$ situada más adelante.

Resulta que la variación de la cantidad de movimiento de la masa de agua $\frac{P}{g}$, entre las dos secciones consideradas, durante un segundo, será:

$$\frac{P}{g} \times (V - v).$$

Sabemos que esta variación es igual á la suma de los impulsos de las fuerzas horizontales que actúan sobre la citada masa.

Siendo vertical la fuerza de la gravedad, no interviene en nada en el movimiento horizontal de la masa líquida, y por lo tanto sólo hay que considerar la diferencia de las presiones hidrostáticas

y si se tiene presente que el peso de agua que pasa por segundo por cada sección es constante, es decir, que se tiene que

$$P = d.S.V = d\,S'\,v = y\,V = y'\,v,$$

resulta, en virtud de estas relaciones, que la fórmula anterior se convierte en

$$F\,v = T\,u = \frac{P\,v}{g} \times (V - v) + \frac{P\,y}{2} + \left(\frac{v}{V} - \frac{V}{v}\right).$$

Como V es mayor que v, se ve que la cantidad $\left(\frac{v}{V} - \frac{V}{v}\right)$ es siempre negativa, y que el segundo término del segundo miembro es sustractivo por consiguiente.

Se tiene, como en todos los casos análogos en que hay compuerta

$$y = 0{,}8\,e$$

y

$$V = \sqrt{2\,g\,(h - 0{,}8\,e)}.$$

La experiencia ha demostrado que el máximo de trabajo útil $T\,u$ tiene lugar cuando la relación de la velocidad de la rueda, á la velocidad de admisión del agua $\frac{v}{V}$ es igual á 0,40.

Siendo la potencia bruta del salto igual á $P \times H$, es decir, al peso P de agua que cae por segundo, multiplicado por la diferencia H de los niveles superior é inferior, el rendimiento teórico será $\frac{T\,u}{P \times H}$.

Para tener el rendimiento práctico es necesario multiplicar esta expresión por un coeficiente de reducción de 0,85 á 0,90, lo que da finalmente un rendimiento real de 0,35 próximamente.

Se ve, por otra parte, que utilizando una parte de la potencia viva del agua en producir un resalto superficial, se determina un desnivel $(i' - i)$ tal que la caída H aumenta en otro tanto y se convierte en

$$H' = H + (i' - i).$$

El trabajo recogido por el receptor es, pues, en realidad, 0,35 $P\,H'$ en vez de 0,35 $P\,H$ solamente.

La elevación e de la compuerta puede variar entre 0,20 como mínimo y 0,50 m. como máximo, en el caso extremo de las mayores crecidas.

El gasto q por metro de anchura y por segundo es:

$$q = m \times e \times v = m \,.\, e \times \sqrt{2\,g\,(h - 0{,}8\,e)},$$

pudiendo variar el coeficiente de contracción m entre 0,74 y 0,80 cuando la inclinación de la compuerta sobre la horizontal, varía de 70. á 45 grados.

Si llamamos l la anchura de la rueda y de la compuerta y Q el gasto total por segundo, el cual es conocido necesariamente, determinaremos esta anchura l por la relación

$$l = \frac{Q}{q}.$$

El diámetro de las ruedas de admisión inferior

está comprendido entre 3,50 y 7 metros, según la altura de la caída.

La velocidad V está dada por la fórmula

$$V = \sqrt{2\,g\,(h - 0{,}8\,e)}$$

y v se deduce de la relación indicada antes

$$\frac{v}{V} = 0{,}40$$

ó

$$v = 0{,}40\ V$$

y más generalmente de la igualdad

$$y.\,V = y'.\,v$$

de donde

$$v = \frac{y}{y'}\,V.$$

En cuanto á la altura $y' = i = p$ depende de que se llenen más ó menos los canjilones, y por consecuencia, de la posición del borde inferior de la compuerta. Este coeficiente varía de $\frac{2}{3}$ á $\frac{4}{5}$.

La velocidad de rotación ó el número de vueltas por minuto vendrá dado, como siempre, por la fórmula

$$N = \frac{60 \times v}{2\,\pi\,R}.$$

El número N y la separación E de las paletas, se calculan por las fórmulas empíricas

$$N = 12\,R$$

y

$$E = \frac{2\pi R}{N} = \frac{\pi}{6} = 0{,}52\text{ m.}$$

En la práctica, esta separación puede variar sin inconveniente entre 0,50 y 0,60 m.

Hemos dicho que, por el artificio del resalto superficial, se puede recuperar la mitad próximamente de la altura de caída $h' = \frac{v^2}{2g}$ debida á la velocidad v del agua al salir de la rueda.

Si admitimos una altura generatriz de la velocidad V igual á 1 m., tendremos que

$$V = \sqrt{2g \times 1\text{ m.}} = 4{,}43\text{ m.}$$

y

$$v = 0{,}40\ V = 1{,}77\text{ m.}$$

de donde

$$\frac{v^2}{2g} = 0{,}16$$

y

$$\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = 0{,}08.$$

Se ve que, en este caso, el resalto superficial aumentará en un 8 por 100 el rendimiento de la rueda.

La rueda de admisión inferior es una rueda de gran velocidad: su consumo de agua es, por lo tanto, relativamente elevado, y sus dimensiones no grandes; su construcción é instalación son muy sencillas, siendo, por lo tanto, económica desde estos puntos de vista.

En cambio, su rendimiento es mucho menor que en las ruedas de admisión lateral, no permitiendo una buena utilización de la caída y no resultando conveniente más que para instalaciones muy sencillas, destinadas á mover mecanismos á gran velocidad y cuando se dispone de un exceso de fuerza.

35. Rueda de admisión inferior y paletas curvas, de Poncelet.—Esta rueda, como lo indica su nombre, difiere de la anterior en que las paletas, en lugar

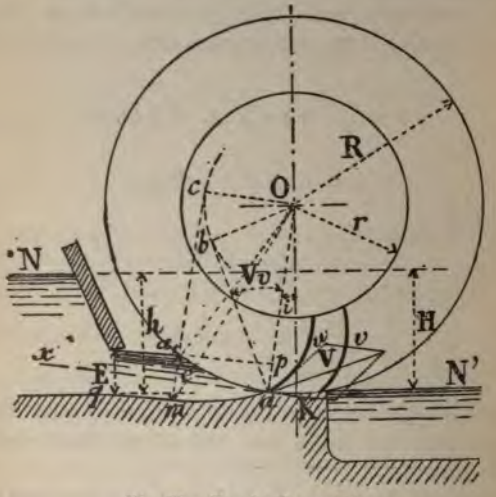


Fig. 25.—Rueda Poncelet.

de ser planas, presentan un corte transversal en forma de arco de círculo. Estas paletas curvas están comprendidas entre dos coronas, pero no hay coraza (fig. 25).

La alimentación se hace de una manera análoga al caso de paletas planas, como se ve en la figura 25, pero generalmente la rueda no se sumerge en el canal inferior, sino que viene á ser tangente al nivel N'.

El suelo que al principio se construía según un plano inclinado, ha sido modificado ventajosamente por Poncelet, inventor de la rueda que nos ocupa, para formar un suelo cilíndrico cuya construcción es la siguiente:

Sea $a\,x$ la dirección determinada por la condición de que la pendiente sea bastante para que el agua circule conservando la velocidad que toma á su paso bajo la compuerta. Se baja sobre $a\,x$ la perpendicular $o\,a$ que forma con la vertical $o\,k$ el ángulo i igual á la inclinación del suelo rectilíneo sobre el horizonte. Se traza en seguida por el punto a la recta $a\,b$ que forma con $o\,a$ un ángulo de 15° igual al que deben formar entre sí las direcciones de las velocidades V y v.

Resulta de esta construcción que la recta $a\,b$ es perpendicular á V, en tanto que $o\,a$ es perpendicular á v, cuya dirección se confunde con $a\,x$ que es tangente á la circunferencia de la rueda.

Una vez hecho esto, se traza con el centro O la circunferencia de radio $o\,b$, tangente á la recta $a\,b$; se toma sobre esta circunferencia un arco $b\,c$, cuyo desarrollo sea igual al espesor $e = 0{,}8\,E$ de la lámina de agua, y se traza la tangente $c\,m$ en el punto c.

Se traza entonces en $a\,m$ la envolvente del círculo de radio $o\,b$ y se formará el suelo cilíndrico que determinará la formación de una lámina de agua de filetes curvilíneos y paralelos á la envolvente

$m\,a$. Estos distintos filetes vendrán, pues, á cortar á la circunferencia exterior de la rueda bajo un ángulo constante $V\,v$, puesto que el ángulo $c\,m\,o$, por ejemplo, no es otro que el ángulo $b\,a\,o$ cuyo vértice se ha desplazado de a á m.

En estas condiciones, la velocidad relativa de los diversos filetes es tangente al primer elemento de la paleta para todo el espesor de la lámina, en tanto que con el suelo rectilíneo los filetes que cortan á la circunferencia según ángulos distintos, vendrán á chocar contra la paleta á la entrada, sea sobre la cara cóncava, ó sea también por debajo sobre la cara convexa, produciendo choques perjudiciales al rendimiento de la rueda.

Si el suelo fuese recto se deberían trazar las paletas para el filete superior y no para el inferior, para evitar los choques de los demás filetes sobre el respaldo de la paleta, es decir, en sentido inverso del movimiento de la rueda. El filete superior es entonces el único que entra sin choque en las paletas.

Debiendo hacerse el trazado de la paleta por el extremo del radio $o\,a$, y dependiendo directamente el punto a del espesor E de la lámina de agua, el radio R dependerá también de este espesor. Resulta, pues, que este radio es proporcional al espesor E y que crece con él, porque si el punto a_1 se eleva sobre la circunferencia, el centro O deberá subir al mismo tiempo sobre la vertical $O\,K$, de tal manera, que el ángulo $a_1\,o\,p$ que es igual á $V\,v$ quede constante como conviene.

No sucede lo mismo con la solera cilíndrica, puesto que la construcción del trazado de la paleta se hace en a cualquiera que sea el espesor E de

la lámina de agua, y el radio de la rueda es completamente independiente de este espesor.

Así, por ejemplo, para el espesor $E = 0{,}20$ y para un ángulo normal de $Vv = 15$ grados, el radio R podrá reducirse á 2,95 m. sin inconveniente en el caso de suelo cilíndrico, en tanto que si es recto R deberá ser 4,70 m.

Estas son las ventajas del suelo curvo.

Para determinar el piso, se une el perfil en envolvente de círculo al umbral, de m á q, por un arco de círculo convexo de gran radio: por último, á partir del punto a, se encaja la rueda en una coraza circular K, con un arco que excede en unos 10 cms. el paso de las paletas.

En la rueda de paletas curvas del sistema Poncelet, el agua no actúa de la misma manera que en la rueda anterior: el agua actúa en virtud de la fuerza viva, debida á la altura de la cabeza de agua h, que es sensiblemente igual á la altura H de caída.

Llamemos V á la velocidad absoluta á la entrada en la rueda y V_1 la velocidad absoluta á la salida. La potencia viva de la masa de agua $\frac{P}{g}$ que entra en un segundo en la rueda, será igual á $\frac{P V^2}{2g}$ y á la salida será solamente $\frac{P V_1^2}{2g}$: la diferencia entre estas dos cantidades será el trabajo útil recogido por la rueda

$$T u = \frac{P V^2 - P V_1^2}{2g} = \frac{P \times (V^2 - V_1^2)}{2g}.$$

Si se admite la serie de igualdades $v = w = \frac{V}{2}$,

que corresponden, como hemos visto en las teorías precedentes, á las mejores condiciones de rendimiento, el triángulo de las velocidades es entonces isósceles, y como el ángulo Vw es de 15°, el vw que es doble, será de 30°.

En estas condiciones, la fórmula del trabajo útil se reduce á

$$Tu = 0{,}933 \frac{P \times V^2}{2g}$$

y como $\frac{V^2}{2g}$ es sensiblemente igual á H, se deduce que

$$Tu = 0{,}933\ P \times H,$$

es decir, que la energía recogida por la rueda será más del 90 por 100 de la energía bruta del salto.

Pero las condiciones supuestas no pueden llenarse exactamente porque los filetes líquidos no se conducen todos de la misma manera y se producen en las paletas, remolinos que dan lugar á pérdidas de trabajo. En la práctica, el rendimiento de la rueda Poncelet, aunque muy superior al de las demás ruedas descritas, varía, para saltos de 1,20 á 2 metros, de 65 á 55 por 100.

La altura de la cabeza de agua es casi la de la caída H, puesto que el umbral del suelo está á una cota que difiere muy poco de la del nivel inferior. Sin embargo, cuando este nivel es muy variable, se aumenta el ángulo i de manera de elevar el umbral, á fin de evitar que no quede el orificio sumergido en las crecidas.

La velocidad absoluta V está dada por la misma relación que en las ruedas de paletas planas.

Con las fórmulas admitidas antes, se tendría que

$$v = w = \frac{V}{2};$$

pero, en realidad, como las velocidades v y w forman entre sí un cierto ángulo, que es aquí de 30 grados, V es la suma de las proyecciones de estas dos velocidades sobre su propia dirección, y se tiene que

$$V = (w + v) \times 0{,}966 = 2\ V \times 0{,}966$$

de donde

$$v = \frac{V}{1{,}932} = 0{,}53\ V.$$

El número de vueltas por minuto es:

$$n = \frac{60 \times v}{2\,\pi\,R}.$$

La profundidad de la rueda debe ser tal, que las moléculas de agua que suben á lo largo de la paleta, en virtud de su velocidad relativa w, no sobrepasen la altura de esta paleta, pudiendo alcanzar teóricamente una altura que es igual á $\frac{w^2}{2g}$. Conviene, sin embargo, dar al paletaje una altura mayor, y en la práctica se admite, para determinar su profundidad, la relación

$$R - r = \frac{H}{3} + E.$$

Se puede todavía utilizar la relación estableci-

da precedentemente, admitiendo un coeficiente de llenado comprendido entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{7}$.

La distancia entre paletas puede ser 0,25 metros cuando son de palastro, pero cuando son de madera, la separación puede llegar hasta 0,45 m. como máximo.

En todos los casos, el número N de paletas viene dado por la relación

$$N = \frac{2\pi R}{E}.$$

Hemos visto que el rendimiento de la rueda Poncelet puede llegar á ser de 65 por 100. El rendimiento máximo se ha obtenido cuando la rueda está sumergida 12 cms. en el canal inferior, disminuyendo el rendimiento, á medida que se sumerge más.

La rueda Poncelet es de velocidad relativamente grande como las demás ruedas de admisión superior: su rendimiento es casi independiente del gasto y también de la velocidad cuando se emplea el suelo en envolvente de círculo. Esta velocidad es, por otra parte, constante, á pesar de las variaciones que pueda sufrir el nivel superior entre límites bastante extensos.

36. Ruedas flotantes con paletas planas.—Este tipo de rueda es el más sencillo que puede imaginarse. La construcción es la misma que la de las ruedas de admisión superior de paletas planas, pero el receptor hidráulico va sencillamente montado en la corriente sin ninguna presa ni compuerta (figura 26).

Las paletas planas van montadas sobre un círculo interior, pero sin estar comprendidas entre coronas laterales, de tal manera, que el agua entre libremente en las paletas.

La profundidad de la corriente y su anchura deben ser muy grandes con relación á las dimen-

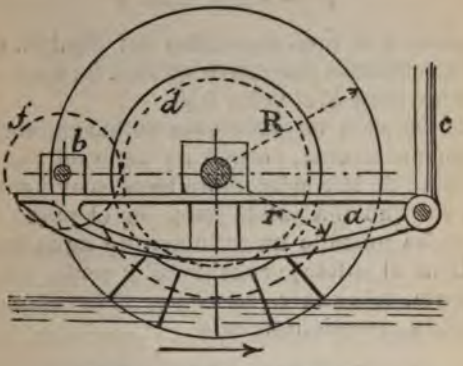


Fig. 26. — Rueda suspendida.

siones de las paletas, de modo que éstas, al sumergirse en las capas superiores, no lleguen á las inferiores, sometidas á remolinos causados por la proximidad del fondo del cauce.

Las paletas sumergidas en la corriente recogen una parte de la potencia viva de los filetes líquidos, que pueden suponerse animados de la misma velocidad en todo el espesor de la lámina en que se sumergen las paletas.

Es evidente que la masa de agua que actúa sobre la rueda, en cada segundo, depende de la superficie de la paleta y de la velocidad V de la

corriente. Si se expresa, por lo tanto, por P el peso de esta masa, por S la superficie de la paleta, y por K un coeficiente que tiene por objeto el tener en cuenta que no se llene completamente el espacio comprendido entre dos paletas consecutivas, se podrá escribir que

$$P = K \times d \times S \times V$$

llamando d el peso específico del líquido, ó sean 1.000 kilogramos por metro cúbico. Se toma generalmente para K el valor 0,80.

Esta relación no puede, sin embargo, ser completamente exacta, porque no tiene en cuenta la velocidad de la rueda: ahora bien, es evidente que cada vez que una paleta pasa por el plano vertical, se ha gastado un volumen de agua igual al que llena el paletaje considerado; sería, por consiguiente, más exacto hacer uso de la relación establecida precedentemente

$$P = d \times 0{,}90\, l \times (R^2 - V^2) \times \frac{v}{2R}$$

en la que R y r son los radios del perímetro exterior de la rueda y de la circunferencia tangente á la superficie del líquido, l la anchura de la rueda y v su velocidad.

La rueda flotante montada así recibe, pues, el impulso F de la masa de agua que viene á chocar contra sus paletas en cada segundo, y este impulso, según la ley de la cantidad de movimiento, tiene por expresión la variación misma de esta cantidad de movimiento por segundo.

La masa $\frac{P}{g}$ está animada de la velocidad V de

la corriente en el momento que entra en la rueda; después sale con la velocidad v de la rueda que acompaña en su movimiento: en este momento su cantidad de movimiento pasa del valor $\frac{P}{g} \times V$ al valor $\frac{P}{g} \times v$, de suerte, que la variación es igual á

$$\frac{P}{g} \times V - \frac{P}{g} v = \frac{P}{g} \times (V - v).$$

Se puede escribir, por lo tanto,

$$F = \frac{P}{g} \times (V - v).$$

Tal es el valor del impulso producido en cada segundo por la masa líquida en movimiento sobre el receptor hidráulico. Como, por otra parte, el trabajo T es siempre el producto del esfuerzo por el desplazamiento del órgano móvil, se tendrá:

$$T = F \times v = \frac{P \times (V - v)}{g} \times v$$

lo que puede también escribirse,

$$T = \frac{P}{g} \times (V - v) \times v.$$

Ahora bien; se demuestra que el producto $(V - v) \times v$ es máximo cuando los dos factores son iguales, y se tiene, por consiguiente, que

$$V - v = v$$

de donde

$$2v = V$$

y

$$v = \frac{V}{2}.$$

Si tiene lugar esta condición, se obtiene para valor máximo del trabajo

$$T = \frac{P}{g} \times \frac{V^2}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{P\,V^2}{2g}.$$

Como $\frac{P\,V^2}{2g}$ no es otra cosa que la potencia viva del agua, vemos que el trabajo recogido por la rueda es solamente la mitad de esta energía. Por consiguiente, el rendimiento del motor que nos ocupa no puede llegar á ser teóricamente más que de 50 por 100, no pasando en la práctica del 40 por 100.

Para determinar las principales dimensiones de la rueda flotante, se debe conocer primero la velocidad V de la corriente, que puede fácilmente medirse. Se adoptará también un cierto coeficiente de rendimiento, 45 por 100 por ejemplo, y se obtendrá P de la fórmula precedente:

$$T = 0{,}45 \times \frac{P\,V^2}{2g}$$

de donde

$$P = \frac{2g}{0{,}45\ V^2} \times T.$$

La velocidad v de la rueda resultará del valor de V, porque debe ser tal que se tenga que

$$\frac{P}{2g} \times v \times (V - v) = 0{,}45 \frac{P V^2}{2g}$$

de donde se deduce que

$$2v \times (V - v) = 0{,}45 \ V^2.$$

El valor de v se puede calcular por aproximaciones sucesivas: se ve, en la hipótesis del rendimiento elegido, que $v = 0{,}345$ satisface á la igualdad anterior.

El diámetro $2R$ se fija según convenga, en cada caso particular, estando generalmente comprendido entre 4 y 6 m. La profundidad $(R - r)$ varía entre $\frac{R}{4}$ y $\frac{R}{5}$ y la distancia entre dos paletas de 0,50 á 1 m.

Las paletas deben sumergirse siempre lo mismo en la corriente: esta condición resulta naturalmente cumplida cuando la rueda está montada sobre una barca que sigue las variaciones del nivel del río, pero si se trata de una instalación fija, hay que adoptar disposiciones adecuadas para realizar la condición exigida de invariabilidad de la altura del agua en las paletas.

La figura 26 deja ver el principio en que se fundan estas instalaciones. La rueda está soportada por una especie de paralelogramo articulado constituído por dos balancines de fundición *a* que se proyectan en el dibujo uno sobre otro y que pueden oscilar alrededor del árbol *b:* estos balancines están colgados, por la derecha, del extremo de las

bielas *c* unidas á un aparato de elevación que permite levantarlas ó bajarlas, de tal manera, que hagan seguir á la rueda variaciones de nivel de la corriente de agua.

El movimiento de rotación de la rueda se transmite al árbol de camas *b* por una rueda dentada *d* y un piñón *f* calado sobre el árbol principal.

Esta rueda debe llamarse mejor *rueda suspendida*, pero el Ingeniero suizo Colladon, ha ideado una disposición que constituye una verdadera rueda flotante, montando las paletas sobre un tonel cilíndrico herméticamente cerrado que gira sobre el agua y que sube ó baja automáticamente con el nivel de la corriente.

Se ve que, cualquiera que sea la disposición adoptada la rueda suspendida ó flotante es, sobre todo, notable por la sencillez de su construcción y de su instalación, pero su rendimiento es poco elevado y este sistema no puede utilizarse más que en algunos casos particulares y únicamente para potencias relativamente pequeñas.

LAS TURBINAS

37. Turbina centrífuga de Fourneyron. — Hemos dado antes la clasificación de las turbinas, bien considerando la manera de moverse el agua en los receptores (turbinas centrífugas, centrípetas, paralelas y mixtas), ó bien, considerando cómo actúa el agua sobre las paletas móviles (turbinas de acción ó de libre desviación, turbinas de reacción ó de presión y turbinas límites sin reacción) (§ 27).

Estudiaremos ahora la turbina centrífuga con y sin reacción.

La figura 27 permite formarse idea de cómo se instala una turbina de este tipo.

El fondo de la cámara de agua *A*, en la que termina el canal de llegada, lleva una cuba cilíndrica de fundición *C*, en el interior de la cual puede subir ó bajar, con junta hermética, un cilindro *D* que constituye la compuerta circular destinada á obturar más ó menos los orificios de salida de los alabes directrices *I*.

Éstos van fundidos sobre el platillo fijo *F* que va sujeto al extremo del tubo *G*, el cual, á su vez, va sujeto á la planchada que recubre la cámara de agua.

Los alabes directrices tienen una altura constante *b* en toda su longitud.

El agua llena estos alabes y se escapa horizontalmente por la periferia de la corona fija, tomando la dirección de la tangente al último elemento de las paredes directrices.

La corona móvil, que constituye el órgano motor de la máquina, es concéntrica á la corona fija: está formada de dos juegos en forma de troncos de cono opuestos por la base menor. Entre estos dos juegos van los alabes curvos *L* cuyas curvaturas están en sentido inverso á las de los alabes directrices: se ve, pues, que el agua no puede pasar de la rueda al canal de salida sin hacer girar á la corona móvil.

Ésta va montada sobre un árbol vertical *K* que pasa por el eje del tubo *G* y que gira sobre el dado *M* sujeto al fondo del canal de salida. En este árbol se recoge, por medio de órganos de transmisión

adecuados al trabajo desarrollado por el agua sobre la corona móvil de la turbina.

La figura inferior representa un corte horizontal por la línea *m n* de las dos coronas fija y móvil. El filete líquido que se mueve en este plano medio está animado de una velocidad absoluta *V* al salir en *a* del alabe fijo: el agua entra entonces en el álabe móvil pero éste gira con una velocidad tangencial *v* en el punto citado, y se puede considerar que el filete líquido participa de este movimiento de arrastre de la rueda, y que por otra parte el agua se desliza sobre el alabe curvo móvil y se desplaza, con relación á este alabe, con una velocidad relativa *w*.

Estas tres velocidades se componen, lo mismo que las fuerzas, según la regla del paralelogramo.

La dirección de la velocidad *w* así determinada sirve para trazar la dirección del primer elemento del alabe móvil. Este alabe debe ser, por lo tanto, tangente á la velocidad *v* en *a*, con objeto de que el filete que tiene esta dirección pueda entrar sin choque en la corona móvil.

Estando las tres velocidades unidas así por los elementos del paralelogramo ó del triángulo que tenga por lados estas mismas velocidades, se concibe que la de arrastre *v* de la corona móvil dependa no solamente del valor de *V*, sino también de la inclinación más ó menos grande de los lados del triángulo.

El ángulo de *v* con *V* depende de la dirección de *V*, es decir, del trazado del elemento exterior del alabe fijo que puede acordarse con la circunferencia: hay que tener igualmente en cuenta el ángulo *g* que forma el primer elemento del alabe

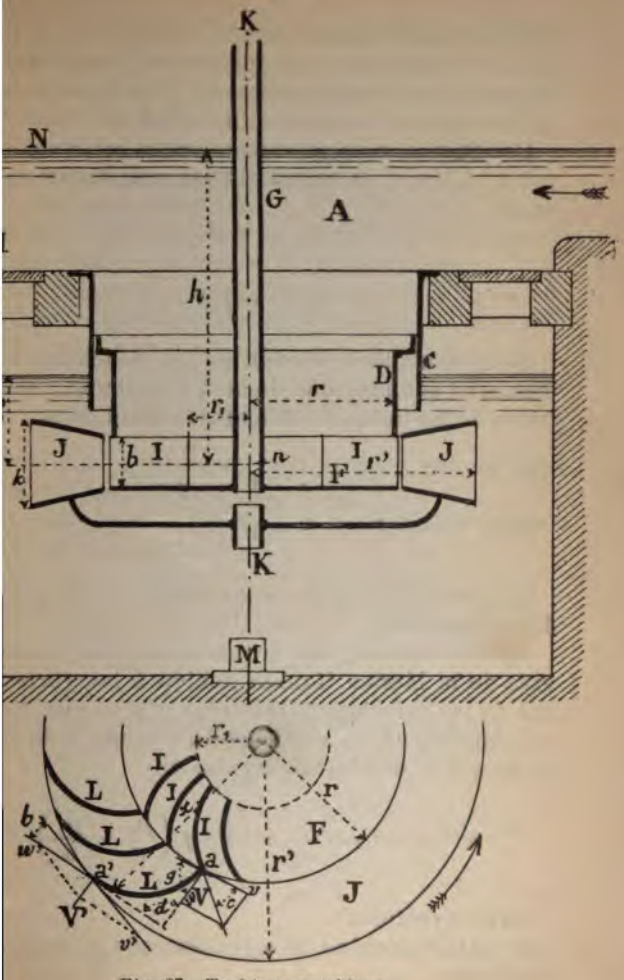


Fig. 27.—Turbina centrifuga.

móvil ó la dirección w con la velocidad v. En lugar de considerar estos ángulos, se pueden tener en cuenta las inclinaciones de V sobre w y de w sobre v que directamente dependen de ellas.

Designemos respectivamente estas inclinaciones por $i_{v,w}$ y $i_{w,v}$ y hagamos para simplificar:

$$i_{v,w} = I$$

y

$$i_{w,v} = I_1.$$

Podremos ahora escribir las dos relaciones fundamentales deducidas de las propiedades geométricas de los lados del triángulo considerado

$$\frac{v}{V} = \frac{I}{I_1} \times \frac{\sqrt{1+I_1^2}}{\sqrt{1+I^2}}.$$

El agua entra en la corona móvil con la velocidad relativa w'.

Aplicando la ley del crecimiento de la potencia viva de la lámina líquida debida á las variaciones de las velocidades relativas w y w' que tiene esta lámina, en las secciones de entrada y de salida en a y a' se obtiene la relación

$$w'^2 = w^2 + v^2 - v'^2 + 2g\left(\frac{p_0}{d} - \frac{p_1}{d}\right)$$

En esta relación

w' es la velocidad relativa buscada, á la salida del alabe;

v' es la velocidad de la corona en la circunferencia exterior de radio r';

v la velocidad de la misma corona en la circunferencia interior del radio r;

p_0 la presión hidrostática en a por unidad de superficie de la sección de la lámina líquida;

p_1 la presión hidrostática sobre la sección de salida en a' que se ejerce de fuera á dentro, es decir, en sentido inverso de la precedente;

Por último, d es el peso específico del líquido ó el peso del metro cúbico de agua en el caso actual.

Ahora bien, se tiene evidentemente

$$p_1 = p_a + d\,h',$$

siendo h' la altura del nivel inferior por encima del plano medio horizontal $m\,n$.

Llevando este valor de p_1 á la expresión precedente, se encuentra que

$$w'^2 = w^2 + v'^2 - v^2 + 2g\left(\frac{p_0 - p_a}{d} - h'\right);$$

v y w son conocidas por la igualdad anterior: en cuanto á v' se deduce de la relación evidente

$$\frac{v'}{v} = \frac{r'}{r},$$

de donde

$$v' = v \times \frac{r'}{r}.$$

Hemos supuesto conocida la velocidad V del filete líquido á la salida de la corona directriz. Ésta

se determina fácilmente escribiendo que la altura generatriz de la velocidad V es igual á la suma de las alturas que corresponden á las presiones que actúan sobre las dos caras exterior é interior de la lámina líquida en a.

La presión interior corresponde á las alturas $\frac{p_a}{d} + h$ debidas á la presión atmosférica p_a y la columna líquida que se eleva por encima del plano medio $m\,n$ de la corona móvil: la presión exterior que se ejerce en sentido inverso corresponde á $\left(-\frac{p_0}{d}\right)$.

Se tendrá, por lo tanto,

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_a}{d} + h - \frac{p_0}{d}.$$

El triángulo de las velocidades en a da igualmente la relación

$$w^2 = V^2 + v^2 - 2V \times v \times \frac{1}{\sqrt{1 + l^2}}$$

llamando i á la inclinación de la velocidad V sobre la velocidad v tangente en a.

A la salida se puede construir de la misma manera el triángulo de las velocidades que dará, por iguales consideraciones que antes, la relación

$$V'^2 = w'^2 + v'^2 - 2\,w' \times v' \times \frac{1}{\sqrt{1 + i_1'^2}}$$

llamando i_1 la inclinación de la velocidad relativa w' sobre la velocidad de arrastre v' tangente en a'.

El agua, al salir de la turbina con una velocidad absoluta V', lleva consigo una energía igual á

$$\frac{1}{2} m V'^2 = \frac{P V'^2}{2g}$$

que no se utiliza.

Siendo la energía bruta de la caída de agua igual á $P \times H$, producto del peso P de agua gastada en un segundo, por la altura de caída ó diferencia de los niveles superior é inferior H, se tendrá, para el trabajo útil teórico:

$$T u = P H - \frac{P V'^2}{2g} = P \left(H - \frac{V'^2}{2g} \right).$$

El rendimiento, que es la relación del trabajo útil á la energía total de la caída, tendrá por tanto, como valor,

$$R = \frac{P H - \frac{P V'^2}{2g}}{P H} = 1 - \frac{V'^2}{2g H}$$

Esta expresión demuestra que el rendimiento es tanto mayor cuanto menor es V' y sería completo si V' fuera cero.

Pero hemos visto que se tiene:

$$V'^2 = w'^2 + v'^2 - 2 w' v' \times \frac{1}{\sqrt{1 + l_1^2}}$$

Se ve que si la inclinación i_1 del último elemento del alabe móvil sobre la velocidad v' fuera nulo, ó, dicho de otro modo, si este elemento se confundiera con la tangente á la circunferencia, la expresión anterior se convertiría en

$$V'^2 = w'^2 + v^2 - 2\,w' \times v';$$

y si se supone aún que $w'^2 = v'$ se obtendrá, por último,

$$V'^2 = 2\,w'^2 - 2\,w'^2 = O.$$

Pero la primera condición no puede realizarse porque entonces los alabes se montarían uno sobre otro y el agua no saldría: por esto se suele limitarse á hacer pequeño el ángulo b, de tal modo, que esté comprendido entre 20 y 30 grados.

La condición $w' = v'$ puede siempre llenarse con la condición, sin embargo, de que el valor de v' sea suficientemente grande para que la turbina gaste toda el agua que da la caída. Supondremos pues, en lo que sigue, que esta relación de igualdad entre la velocidad relativa y la velocidad de arrastre, á la salida de los alabes móviles, se verifica siempre.

Las relaciones establecidas anteriormente son fórmulas generales que se aplican á todas las turbinas centrífugas, sean de libre desviación ó de reacción.

Pero las propiedades especiales á cada uno de los diferentes modos de funcionamiento de los receptores, tienen por efecto introducir en las fórmulas generales modificaciones importantes que conviene estudiar ahora.

Utilizaremos en primer lugar la relación $w' = v'$ que hemos admitido, y que introducida en las fórmulas precedentes, permitirá simplificarlas en cierta medida.

Se puede observar desde luego que la relación fundamental es la que da la velocidad V del líquido á la salida de la corona directriz. Esta velocidad depende, en efecto, de la altura de caída de que se dispone y es el elemento principal de la energía recogida y devuelta por la turbina. Esta fórmula es, como hemos visto,

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_a}{d} + h - \frac{p_0}{d}.$$

En el segundo miembro de esta relación se conoce todo, menos la contrapresión p_0, que se ejerce del exterior al interior en el punto a del alabe directriz.

Hay, por lo tanto, que buscar el valor de $\frac{p_0}{d}$ y este valor presenta un interés especial, porque caracteriza precisamente la condición del funcionamiento á libre desviación, ó por reacción.

Para ello, tendremos en cuenta que, en la fórmula anterior, puede sustituirse h por su valor

$$h = H + h'.$$

Usaremos también la fórmula en w'^2 que da la velocidad relativa en a' y que se convierte, por la simplificación que resulta de hacer $w' = v'$, en

$$o = w^2 - v^2 + 2g\left(\frac{p_0 - p_a}{d} - h'\right).$$

Sumemos miembro á miembro esta igualdad con la anterior, después de haber puesto esta última bajo la misma forma

$$V^2 = 2g\left(\frac{p_a - p_0}{d}\right) + h.$$

Obtendremos entonces, observando que

$$h - h' = H,$$

la igualdad

$$V^2 = w^2 - v^2 + 2gH.$$

Sustituyamos w^2 por su valor dado por la relación que se obtiene del triángulo de las velocidades en a, y resultará:

$$V = \frac{gH}{v} \times \sqrt{1 + i^2}.$$

Ahora bien, se tiene que

$$w' = v' = v \times \frac{r'}{r}$$

de donde

$$v = w' \times \frac{r}{r'}.$$

Sustituyendo este valor en la expresión de V, queda:

$$V = \frac{gH}{w'} \times \frac{r'}{r} \times \sqrt{1 + i^2}.$$

Observamos entonces que V vendría exclusivamente expresado en función de las dimensiones principales de la turbina, si la velocidad relativa w' en el alabe móvil pudiese expresarse también su función de estas dimensiones. Esta rela-

ción que buscamos se podrá obtener de la consideración del gasto de la turbina.

Basta para esto escribir que el volumen que pasa en un segundo por los orificios de la corona directriz, es igual al que pasa, durante el mismo tiempo, por los orificios de la corona móvil.

Para calcular el gasto á la salida de los alabes de la corona fija, es necesario considerar la sección recta de la lámina líquida cuyos filetes son paralelos á la dirección V. Admitiremos, como se hace con una aproximación suficiente en la práctica, que la tangente en a, por ejemplo, se confunde con el arco de longitud l' abrazado por dos alabes consecutivos.

La dimensión horizontal de la sección recta de la lámina líquida formará en a, con la tangente v, un ángulo complementario del que forman entre sí las velocidades v y V, de manera que, llamando, como siempre, i la inclinación correspondiente á este último ángulo, se tendrá:

$$l = l' \times \frac{i}{\sqrt{1 + i^2}}.$$

La suma de las dimensiones horizontales de las secciones de salida es igual á la expresión anterior multiplicada por el número de juegos de alabes, pero hay que tener en cuenta el espesor de los mismos. Si representa, por ejemplo, este espesor la quinzava parte de la circunferencia, la luz horizontal disponible no será de más de 0,85 m. de l.

Es necesario, por tanto, multiplicar el resultado anterior por un coeficiente K tal como 0,85 que será siempre menor que la unidad.

La suma de todas las longitudes l' es igual á $2\pi R$ y la salida horizontal disponible será, por consiguiente,

$$K \times L = 2\pi r \times \frac{i}{\sqrt{1+i^2}} \times K.$$

Siendo igual á b la dimensión vertical de los orificios, la sección total de salida por los orificios de la corona directriz será:

$$S = 2\pi r \times b \times \frac{i}{\sqrt{1+i^2}} \times K$$

y el gasto por segundo

$$Q' = 2\pi r \times b \times V \times \frac{i}{\sqrt{1+i^2}} \times K$$

puesto que esta agua sale de los orificios citados con la velocidad V.

Pero esta fórmula daría aún un gasto mayor que el gasto real, porque no tiene en cuenta la contracción que se produce en los canales de salida. Será, pues, necesario multiplicar todavía este resultado por un coeficiente de contracción m que varía de 0,85 á 1, según la naturaleza y el estado de los alabes, y se tendrá finalmente,

$$Q' = 2\pi r \times b\ V \times \frac{i}{\sqrt{1+i^2}} \times K \times m.$$

El gasto de los orificios de salida de la corona móvil se calculará de la misma manera obteniéndose su valor sustituyendo en la fórmula anterior v por w' porque w' es la velocidad con la cual la

lámina atraviesa la sección normal al interior de los alabes. Además la inclinación i deberá ser sustituída por la inclinación i_1 de la velocidad w' sobre la velocidad v' y la altura b por la altura b'.

Se tendrá, por lo tanto,

$$Q'' = 2\pi r' \times b' \times w' \times \frac{i_1}{\sqrt{1+i_1^2}} \times K \times m$$

suponiendo para mayor sencillez que los coeficientes K y m son iguales en los dos casos.

Se podrá, pues, escribir suprimiendo factores comunes,

$$r \times b \times V \times \frac{i}{\sqrt{1+i^2}} = r' \times b' \times w' \times \frac{i_1}{\sqrt{1+i_1^2}}$$

de donde

$$\frac{V}{w'} = \frac{r' \times b'}{r \times b} \times \frac{i_1}{i} \times \frac{\sqrt{1+i^2}}{\sqrt{1+i_1^2}}.$$

Por otra parte, si multiplicamos por V los dos miembros de la relación que queremos transformar, se convertirá en

$$V^2 = \frac{V}{w'} \times g H \times \frac{r'}{r} \times \sqrt{1+i^2}.$$

No queda ya más que sustituir $\frac{V}{w'}$, por el valor anterior, para obtener el resultado buscado, ó sea

$$V^2 = g H \times \frac{v'^2}{v^2} \times \frac{b'}{b} \times \frac{i_1}{i} \times \frac{(1+i^2)}{\sqrt{1+i_1^2}}.$$

Los cálculos que preceden nos dan todos los ele-

mentos necesarios para obtener el valor de la contrapresión p_0 en función de las dimensiones de la turbina. Podemos, en efecto, obtener de la relación fundamental

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d} + h - \frac{V^2}{2g} = \frac{p_a}{d} + H + h' - \frac{V^2}{2g}$$

puesto que sabemos que $h = H + h'$.

Sustituyamos en esta igualdad V^2 por el valor encontrado antes, y tendremos:

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d} + h' + H \times \left(1 - \frac{b'}{b} \times \frac{r'^2}{r^2} \times \frac{i_1}{i} \times \frac{\sqrt{1+i^2}}{2\sqrt{1+i_1^2}}\right)$$

Se ve que la presión hidrostática $\frac{p_0}{d}$ es igual á la presión exterior $\frac{p_0}{d} = \left(\frac{p_a}{d} + h'\right)$ aumentada en una tercera cantidad que, en realidad, se suma ó se resta según que el término negativo del paréntesis es menor ó mayor que 1: si este mismo término es igual á 1, el paréntesis se anula y el tercer término desaparece: habrá, por tanto, que considerar los tres casos correspondientes á las tres hipótesis consideradas

$$\frac{p_0}{d} > \frac{p_a}{d} + h';$$

$$\frac{p_0}{d} < \frac{p_a}{d} + h';$$

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d} + h'.$$

En el primer caso, siendo la presión exterior en a mayor que la presión interior, el agua se esca-

pará por el juego, que no puede evitarse en la práctica que exista entre las dos coronas: en el segundo caso se verificará el fenómeno inverso y el agua del canal inferior será la que entre en la turbina por el juego antes citado.

De estas circunstancias resultará, en los dos casos, una pérdida de trabajo.

Por el contrario, si se realiza la igualdad entre la presión exterior y la interior, no se producirá ninguna pérdida. Además veremos que ésta es la condición esencial del funcionamiento por libre desviación.

La segunda igualdad establecida, que expresa la igualdad entre la presión exterior y la interior á la salida del alabe móvil, ó sea,

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d} + h'$$

se simplifica todavía cuando la corona está enteramente fuera del agua, en cuyo caso h' es nulo, y se tiene:

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d}.$$

Para que esta condición se verifique, no basta que la turbina esté completamente fuera del agua, sino que hace falta que la presión atmosférica p_a pueda ejercerse sobre la superficie libre de las venas líquidas.

Hace falta, pues, realizar en primer lugar una superficie libre, y para esto hay que hacer las secciones de salida de los alabes móviles, de tal manera, que presenten una luz de salida superior á

la estrictamente necesaria para el paso de las venas líquidas que salen de los alabes directrices. De este modo la lámina de agua, como no llena exactamente la capacidad del juego de alabes móviles, se desprende de la cara convexa de cada alabe y se desliza sobre la cara cóncava del alabe opuesto, como si el movimiento se efectuase en un canal descubierto.

Por último, para que pueda ejercerse la presión atmosférica sobre la superficie de la vena líquida, se practica, en el juego superior de la corona móvil y detrás de cada alabe, un orificio cuya anchura debe ser inferior al intervalo que se deje libre entre la superficie de la lámina líquida y la cara convexa del alabe.

Se concibe que, en estas condiciones, la lámina líquida no ejerza ya ninguna presión ni reacción sobre los alabes como la ejercería si éstos estuvieran enteramente llenos por el agua, y su acción se debe únicamente á la fuerza viva de las venas líquidas desviadas de su dirección primitiva. Por esta razón se ha calificado este modo de funcionamiento con el nombre de *libre desviación*.

Está, pues, bien establecida la relación $p_0 = p_a$ que caracteriza esta clase de turbinas.

Es necesario además tener en cuenta que no puede haber libre desviación, tal como acabamos de definirla, con una turbina sumergida, por ser esta circunstancia incompatible con la presencia de los orificios destinados á asegurar la salida del agua en presencia y bajo la acción de la presión atmosférica.

Pero una turbina puede estar sumergida, sin embargo, sin que su funcionamiento produzca nin-

guna *reacción*. Basta para esto que por una parte las secciones de los alabes sean tales, que el movimiento del agua se efectúe sin vacío ni presión en el interior de estos canales, y por otra, que se verifique la condición general

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d} + h'$$

la cual se aplica al caso de una turbina sumergida á la profundidad h'.

Supondremos, pues, en lo que va á seguir, que consideramos la turbina su reacción y que la condición anterior se satisface siempre.

Esta relación puede escribirse:

$$\frac{p_0 - p_a}{d} = h';$$

llevémosla á la fórmula establecida antes

$$o = w - v^2 + 2g\left(\frac{p_0 - p_a}{d} - h'\right)$$

y se simplificará entonces convirtiéndose en

$$o = w^2 - v^2$$

de donde

$$w = v.$$

Se ve que esta relación resultará siempre de la condición general citada antes, ya sea h' nulo ó deficiente de cero. Caracteriza, pues, en todos los casos, el funcionamiento sin reacción, y realizán-

dose la condición de igualdad de estas dos velocidades, tendremos exclusivamente, ó una turbina de libre desviación si la corona móvil está fuera del agua, ó una turbina *límite, sin reacción* si está sumergida.

Sin embargo, no podrá llamarse realmente de libre desviación si no responde á todas las condiciones citadas antes referentes á la superficie libre del líquido y á la presencia de los orificios sobre el juego superior de la corona móvil.

La condición anterior hace que el triángulo de las velocidades en el punto a sea isósceles (fig. 27): resultaría equilátero si el ángulo de las dos velocidades v y V fuera igual á 60 grados, en cuyo caso se tendría:

$$w = v = V.$$

Llevemos aún la relación característica de la no reacción en la fórmula que da el valor de V, ó sea:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_a}{d} - \frac{p_0}{d} + h,$$

y se convierte en

$$\frac{V^2}{2g} = h - h' = H$$

de donde

$$V = \sqrt{2g\,H}.$$

Es decir, que la velocidad del agua á la salida de las directrices es igual á la que corresponde á

la caída H. Esta circunstancia no se produce más que en el caso en que se realizan las condiciones expresadas precedentemente. La relación anterior es, por lo tanto, también característica del funcionamiento sin reacción, esté sumergida ó no la turbina.

Además, la turbina, como hemos explicado antes, podrá ser de libre desviación si está montada por encima del nivel más elevado de las aguas en el canal inferior, ó por lo menos, si está sumergida artificialmente por la *hidroneumatización* de que nos ocuparemos en seguida.

En el caso del funcionamiento por reacción, la velocidad V está dada por la fórmula general obtenida anteriormente

$$V = \frac{g\,H}{v} \times \sqrt{1 + i^2};$$

hemos demostrado también que

$$\frac{v}{V} = \frac{I}{I_1} \times \frac{\sqrt{1 + I_1^2}}{\sqrt{1 + I^2}}$$

y combinando las dos, se obtiene fácilmente la fórmula general

$$V^2 = g\,H \times \frac{I_1}{I} \times \frac{\sqrt{1 + I^2} \times \sqrt{1 + i^2}}{\sqrt{1 + I_1^2}}$$

Ahora bien, en el caso del funcionamiento sin reacción se tiene que $w = v$ y el triángulo de las velocidades en a es isósceles, es decir, que estas

dos velocidades están igualmente inclinadas sobre la velocidad V; luego $I = i$.

La fórmula se simplifica, por consiguiente, y se convierte en

$$V^2 = g\,H \times \frac{(1 + i^2)}{i} \times \frac{I_1}{\sqrt{1 + I_1^2}}.$$

Pero además de que el ángulo tiene por suplemento el doble del ángulo que forma v con V y que corresponde á la inclinación i, se deduce la relación

$$\frac{I_1}{\sqrt{1 + I_1^2}} = \frac{2\,i}{(1 + i^2)}$$

que llevado á la fórmula anterior hace que vuelva á encontrarse la expresión

$$V^2 = 2\,g\,H$$

de donde

$$V = \sqrt{2\,g\,H}.$$

Esta relación procede de la hipótesis $w = v$: si v es mayor que w, como en las turbinas de reacción, se debe aplicar la fórmula general en la cual los factores en función de las inclinaciones tienen un valor inferior á 2, de tal manera, que V es menor que en el caso de las turbinas sin reacción, y se tiene que

$$V < \sqrt{2\,g\,H}$$

se llama grado de reacción la relación

$$\frac{V}{\sqrt{2\,g\,H}} = K$$

de la velocidad del agua al salir de las directrices á la velocidad teórica $\sqrt{2gH}$ aplicable al funcionamiento de la turbina sin reacción.

La igualdad de los ángulos ó de las inclinaciones i é I permite igualmente simplificar el valor de la relación $\frac{v}{V}$ que se convierte entonces en

$$\frac{V}{v} = \frac{\sqrt{1+i^2}}{2}.$$

Se ve que esta relación depende únicamente de la inclinación de la velocidad v en el punto a.

Cuando el ángulo correspondiente á la inclinación crece de 0 á 90°, esta relación va aumentando de 0,50 á un valor teórico infinito.

Este ángulo, sin embargo, no puede ser nulo porque entonces el último elemento del alabe de la corona directriz se confundiría con la circunferencia de esta corona y la sección de salida sería nula.

No puede tampoco llegar á valer 90° porque entonces los alabes estarían dirigidos según los radios, lo que haría su acción enteramente inútil.

De cualquier modo que sea, la relación $\frac{v}{V}$ permite clasificar las turbinas desde el punto de vista de su velocidad. Se llaman turbinas de pequeña velocidad, aquéllas para las cuales esta relación es menor que 0,60: las turbinas de gran velocidad son aquéllas en las que esta relación tiene un valor próximo á la unidad.

Hemos visto que el rendimiento de la turbina

tiene por expresión

$$R = \frac{T}{T - t} = \frac{H - \frac{V'^2}{2g}}{H}.$$

Esta relación puede simplificarse y escribirse en la forma

$$R = 1 - \frac{V'^2}{2g\,H}.$$

Ya hemos hecho observar que para obtener el rendimiento máximo hace falta que se cumplan dos condiciones: La primera consiste en hacer $w' = v'$; sin embargo, como es la velocidad relativa la que determina el gasto del alabe móvil, es necesario que el valor de v' sea suficiente para asegurar el gasto total de la caída, si se quiere que se verifique la condición anterior.

En cuanto á la segunda condición que no puede quedar exactamente cumplida en la práctica, se podrá conseguir una aproximación sensible, sin embargo, haciendo que el ángulo de las dos velocidades sea tan pequeño como lo permitan las exigencias del gasto. En la práctica, este ángulo está comprendido entre 20 y 30 grados.

Se demuestra también que el rendimiento depende además de la inclinación de las velocidades v y V una sobre otra. En definitiva, el rendimiento es tanto mayor cuanto menores son los ángulos que forman entre sí las velocidades w' y v' por una parte y v y V por otra.

Pero hemos visto anteriormente que la velocidad de la turbina dependía de la inclinación de v sobre V, correspondiendo á pequeñas inclinaciones

poca velocidad é inversamente. Se deduce de aquí que las turbinas de pequeña velocidad serán también las de mayor rendimiento.

Por otra parte, la relación establecida antes y que da la condición de libre desviación, ó sea

$$\frac{b'}{b} \times \frac{r'^2}{r^2} \times \frac{i_1}{i} \times \frac{\sqrt{1+i^2}}{\sqrt{1+i_1^2}} = 1$$

permite escribir que

$$\frac{b'}{b} = \frac{r^2 \times i \times 2\sqrt{1+i_1^2}}{r'^2 \times i_1 \times \sqrt{1+i^2}}$$

y como V', que entra en la expresión del rendimiento depende necesariamente de las dimensiones b y b' de los orificios de entrada y de salida, y por consiguiente de r' y de r según esta relación, se ve que V' será tanto más pequeño y el rendimiento tanto más grande cuanto más próxima á la unidad esté la relación $\frac{v'^2}{v^2}$.

Por lo tanto, será conveniente hacer v' lo menos diferente posible de v: pero en la práctica no hay más remedio que tomar para v y v' valores muy distintos á fin de poder dar al alabe móvil un desarrollo suficiente y se admite generalmente que

$$v = 1{,}5\, v' \text{ á } 2\, v'.$$

Las fórmulas anteriores dan el rendimiento teórico que habrá que multiplicar, para obtener el real ó práctico, por un coeficiente inferior á la unidad y comprendido entre 0,80 y 0,90.

En resumen: se podrán admitir, según los ángulos adoptados para las inclinaciones de los alabes sobre la circunferencia y según la relación de los radios exteriores é interiores, rendimientos entre 0,70 y 0,75 para las turbinas de pequeña velocidad, y de 0,58 á 0,62 para las turbinas de gran velocidad.

La expresión del trabajo dado por la turbina

$$T = P \times \left(H - \frac{V'^2}{2g} \right)$$

comprende la altura total de caída H. Esta expresión supone, pues, que la corona móvil está completamente sumergida en el agua del canal inferior.

La figura dada antes indica, en efecto, que el plano medio $m\,n$ de esta corona está montado á una profundidad h' por debajo del nivel del agua en el canal de escape. Si, en lugar de ser así, este plano medio estuviera, por el contrario, situado á una altura h'' por encima del nivel N', es evidente que la caída se reduciría en esta misma cantidad y el trabajo producido sería solamente

$$T = P \times \left(H - h'' - \frac{V'^2}{2g} \right).$$

En cuanto al rendimiento, se convertiría en

$$R = 1 - \frac{V'^2}{2g\,H} - \frac{h''}{H}.$$

Resulta que la pérdida de trabajo útil y de ren-

dimiento, es tanto mayor cuanto más se aproxima h'' á H.

Sin embargo, esta pérdida es relativamente más importante en las caídas pequeñas que en las grandes, y al mismo tiempo hay interés en sumergir las turbinas en el primer caso, colocándolas debajo del nivel del estiaje.

Para hacer variar la potencia de la turbina según las necesidades y la importancia de la carga de la fábrica, hay que variar uno de los elementos de la energía, y para ello se actúa sobre el gasto P.

En la turbina del sistema Fourneyron, de que estamos ocupándonos, esta variación se obtiene por medio de la compuerta circular D que se intercala en el juego que queda libre entre las dos coronas. Pero si la compuerta no está más que parcialmente levantada, las venas de agua que entran por el orificio así estrangulado en los alabes de la corona móvil, se extienden en la capacidad ensanchada del alabe, dando lugar á remolinos, y por consiguiente, á pérdidas notables de trabajo.

Se deduce de aquí que el rendimiento máximo á plena carga va constantemente disminuyendo con el descenso de la compuerta correspondiente á la reducción de la carga. Esta disminución del rendimiento puede llegar á ser del 50 por 100.

Para evitar este inconveniente imaginó, hacia el año 1850, el Ingeniero francés Girard, el sistema de *compuerta parcial* representado en la figura 28.

En esta disposición no hay alabes fijos A más que en dos cuadrantes opuestos diametralmente en la circunferencia: además el número de directrices es doble del de los alabes de la corona móvil. Los otros dos cuadrantes de la circunferencia

están ocupados por un tabique cilíndrico formado por la prolongación inferior de la cuba *D*.

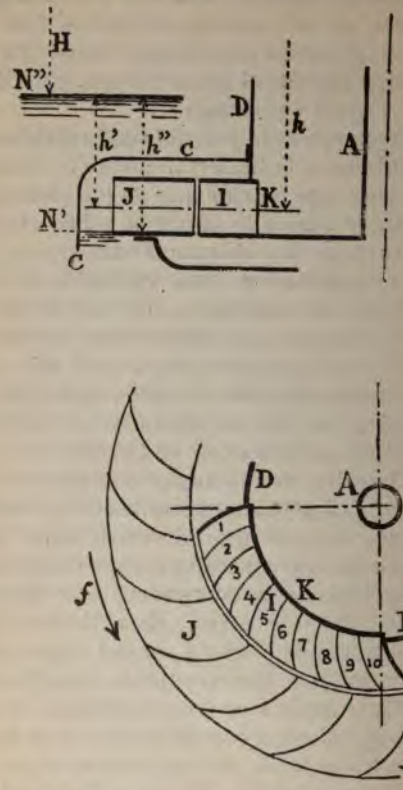


Fig. 28.—Compuerta parcial de Girard.

Detrás de los alabes directrices va una compuerta circular, que ocupa también el espacio de un

cuadrante, y que puede moverse un cuarto de circunferencia descubriendo sucesivamente los alabes 1 á 10 en el sentido del movimiento de la corona móvil.

Así se abren, según las necesidades y las variaciones que sufre el caudal de la corriente, un número mayor ó menor de estos orificios, en lugar de reducir en la misma cantidad la sección de cada uno de ellos, evitándose de este modo los remolinos y quedando el rendimiento de la turbina casi constante á pesar de las variaciones del gasto.

38. Hidroneumatización.— La compuerta parcial aplicada á la turbina Fourneyron, exige que la corona móvil gire en el aire y no en el agua. En efecto, si esta corona está sumergida, solamente se alimenta la mitad de los alabes por los cuadrantes de los alabes directrices, mientras que la otra mitad se llena por el agua del canal inferior que queda así almacenada en estos alabes, en estado de reposo relativo. Cuando después van éstos á situarse delante de los directrices, el agua que sale por estos orificios viene á chocar contra el agua en reposo relativo y se produce una pérdida de trabajo bastante considerable.

Es necesario, por lo tanto, colocar la corona móvil por encima del nivel de aguas abajo, lo que constituye una pérdida de caída, como hemos explicado antes.

El Ingeniero Girard ha remediado también este segundo inconveniente, adaptando á la cuba *D* una campana *C* que envuelve la corona móvil y se sumerge una cierta cantidad por debajo del borde inferior. Por medio de una pequeña bomba

movida por la misma turbina, se inyecta el aire debajo de la campana á una presión suficiente para sacar á la turbina del agua. Esta disposición es lo que Girard ha llamado *hidroneumatización*.

La hidroneumatización permite, por lo tanto, colocar el eje de la turbina por debajo del nivel inferior.

Sea h' la profundidad á la cual se coloca este eje y h'' el nivel del agua en el interior de la turbina, después del desnivel producido por el aire comprimido (fig. 28).

Esta última altura h'' representa la columna de agua que hace equilibrio á la presión del aire comprimido, de tal manera, que la presión que se ejerce en la entrada de los alabes móviles, bajo la campana, tiene por valor

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d} + h''$$

en tanto que si la turbina estuviera sumergida, como de ordinario, esta expresión sería

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d} + h'.$$

Recordamos además que ésta es la condición de funcionamiento á libre desviación, por la cual no hay ni impulsión ni aspiración del agua á través del juego existente entre las dos coronas fija y móvil.

Si llevamos el primer valor de $\frac{p_0}{d}$ á la ecuación fundamental,

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_a}{d} + h - \frac{p_0}{d}$$

se convierte en

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_a}{d} + h - \frac{p_a}{d} - h''$$

y como

$$h = H + h'$$

se obtiene

$$\frac{V^2}{2g} = H - (h'' - h')$$

de donde

$$V = \sqrt{2g\,[H - (h'' - h)]}.$$

En el caso en que la turbina estaba sumergida, sin hidroneumatización, se tenía que

$$V = \sqrt{2g\,H}.$$

Se ve, pues, que este artificio tiene por efecto el crear una pérdida de caída representada por la altura $(h'' - h')$, es decir, igual á la semialtura de las coronas de la turbina.

El resultado es, pues, el mismo que si se hubiese colocado la turbina por encima del nivel N'', en una posición relativa semejante á la que ocupa con relación al nivel N'.

La hidroneumatización no tendría, por lo tanto, ninguna ventaja si el nivel inferior fuera constante, pero como éste es susceptible de elevarse y de sumergir la turbina, se remedia así este inconveniente.

39. Cálculo de una turbina centrífuga.—Las diversas relaciones que hemos establecido en este estudio, permiten calcular las dimensiones principales de una turbina Fourneyron de eje vertical.

Si nos referimos al dibujo de esta turbina (figura 27), sin sistema de hidroneumatización, observamos que el radio r de la cuba es justamente el de la llanta exterior de la corona directriz.

Se determina este radio por la condición de que la velocidad u del agua, que baja según el eje de la cuba, no sea superior á 1 m. por segundo.

Es necesario escribir que el gasto Q es igual á la sección horizontal de la cuba, multiplicada por la velocidad

$$Q = \pi r_1^2 \times u$$

de donde

$$r_1 = \sqrt{\frac{Q}{\pi \times u}}$$

ó sencillamente

$$r_1 = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$$

si se da á u el valor máximo de 1 m.

En el caso en que la turbina estuviera provista del mecanismo de hidroneumatización, el radio de la cuba r'' corresponde al círculo interior de la corona directriz. En cuanto al radio exterior r, viene dado por la relación

$$r = 1{,}20\ r'' \text{ á } 1{,}50\ r''.$$

El agua se gasta por todo el contorno de la corona directriz, por un orificio cuya altura es b, y cuya base sería igual al desarrollo de la circunferencia $2\pi r$, si no fuese necesario tener en cuenta el espesor de los alabes que ocupan una cierta parte de la sección de salida.

Estos alabes, según que sean de fundición, de

palastro, de hierro, de acero ó de cobre, tienen espesores que varían entre 2 y 10 mm.

El número n de los alabes directrices está comprendido entre 40 y 80 mm. según el diámetro de la turbina, y si llamamos l su espesor, será necesario restar de la sección de salida una sección correspondiente á $n\,e$ sobre el desarrollo de la circunferencia.

Pero esto supone que la lámina líquida se escapa radialmente, y no es así, sino que por el contrario, sale oblicuamente cortando á la circunferencia según su ángulo de inclinación i: por estas consideraciones hemos establecido anteriormente la relación

$$Q = 2\pi r \times b \times V \times \frac{i}{\sqrt{1+i^2}} \times K \times m.$$

En esta fórmula K tiene en cuenta la reducción de la sección procedente de $n\,e$, y m es el coeficiente de contracción que reduce la sección real de la vena líquida. Hagamos para simplificar

$$2\pi \times \frac{i}{\sqrt{1+i^2}} \times K \times m = A$$

y la relación anterior se convertirá en

$$Q = A \times r \times b \times V$$

y como en la hipótesis de la libre desviación, tenemos que

$$V = \sqrt{2\,g\,H}$$

resulta

$$Q = A \times r \times b \times \sqrt{2\,g\,H}.$$

Como se conoce el gasto Q del curso de agua que se quiere utilizar en el receptor y la altura H de la caída, en esta fórmula todo es conocido, salvo b que se puede obtener inmediatamente, pues se tendrá que

$$b = \frac{Q}{A \times r \times \sqrt{2\,g\,H.}}$$

Así se determina la altura de la corona directriz.

Hay qué observar, por otra parte, que el coeficiente A que figura en el valor de b depende de i, es decir, de la inclinación de la velocidad V sobre la velocidad v de arrastre de la rueda, ó también de la oblicuidad del último elemento del alabe directriz sobre la circunferencia. *El valor de esta inclinación está determinado por la consideración de la velocidad que conviene adoptar.* (§ 37).

La velocidad está en relación directa con el rendimiento, como ya hemos visto, teniendo las turbinas de gran velocidad un rendimiento superior á las de poca marcha. Por otra parte, siendo las primeras necesariamente de menores dimensiones, para la misma potencia, exigen gastos de instalación menores y son más ventajosas desde este punto de vista.

Sea como quiera, habiendo sido fijado el valor del ángulo de inclinación por estas diversas consideraciones, se podrá calcular A y por consiguiente determinar la altura b y todas las dimensiones de la turbina.

Si llamamos v la velocidad en la periferia interior de la corona móvil, de radio r, podremos calcular el número de vueltas por minuto por medio

de la relación general:

$$n = \frac{60 \times v}{2 \pi r}$$

y como por otra parte hemos establecido antes la igualdad

$$v = V \times \frac{\sqrt{1 + i^2}}{2}$$

queda, sustituyendo v por este valor en la fórmula anterior

$$n = \frac{60\ V}{2 \pi r} \times \sqrt{1 + i}.$$

El radio interior de la corona móvil es igual á r salvo el juego necesario entre las dos coronas. La altura de los alabes á la entrada es teóricamente igual á b: sin embargo, para evitar las imperfecciones de ejecución y el que las venas de agua, á la salida de los alabes directrices no vengan á chocar contra los juegos de la corona móvil, se hace en la práctica

$$b_1 = b + 0{,}005 \text{ m}.$$

El radio exterior r' está comprendido, como para la corona fija, entre $1{,}20\ r$ y $1{,}50\ r$.

La altura b' de la corona móvil á la salida de los alabes de esta corona se calcula por la relación

$$Q = 2 \pi r' \times b' \times w' \times \frac{i}{\sqrt{1 + i_1^2}} \times K' \times m'$$

de donde

$$b' = \frac{Q}{A' \times r' \times w'}.$$

Haciendo

$$A' = 2\pi \times \frac{i}{\sqrt{1+i_1^2}} \times K' \times m.$$

El coeficiente K' tiene en cuenta el espesor de los alabes cuyo número varía entre 30 y 60 y no debe nunca ser superior al de los alabes directrices, á fin de dejar pasar los cuerpos extraños que se introducen en estas últimas.

El ángulo del último elemento de salida del alabe sobre la tangente á la circunferencia debe corresponder á una inclinación i tal, que se realice la condición

$$\frac{b'}{b} = \frac{r^2}{r'^2} \times \frac{i}{i_1} \times \frac{2\sqrt{1+i_1^2}}{\sqrt{1+i_2}}.$$

Sabemos, en efecto, que esta relación debe quedar satisfecha para que no pase nada de agua entre las dos coronas supuestas sumergidas.

Pero si la turbina está colocada á una altura suficiente por encima del nivel inferior para que no esté sumergida en ningún caso por las crecidas ordinarias, se podrá aumentar b', de tal manera, que la relación considerada sea superior al valor del segundo miembro de esta relación. Entonces el agua no llenará toda la capacidad de los canales á la salida de la corona móvil, y si se tiene cuidado además de practicar orificios en el juego superior de la corona, se obtendrá el funcionamiento llamado de libre desviación.

Es útil darse cuenta de la influencia de las variaciones de la velocidad de rotación de la turbina Fourneyron sobre su gasto.

Hemos establecido antes la fórmula

$$w' = v \times \frac{r'}{r};$$

llevando este valor á la expresión del gasto, se tendrá

$$Q = A' \times r' \times b' \times v \times \frac{r'}{r}.$$

Esta relación indica que el gasto varía proporcionalmente á la velocidad de rotación de la turbina; pero para que fuera así, sería preciso que la condición de libre desviación quedase cumplida para todas las velocidades; ahora bien, no se pueden modificar los elementos de la turbina para adoptarlos á las distintas velocidades y, por consiguiente, la proporcionalidad que resulta de esta relación no existe en la práctica. Sin embargo, el gasto crece en una cierta medida con la velocidad, cuando, por el contrario, sería conveniente que disminuyera para llevar la velocidad á su valor de régimen.

40. Turbina centrípeta.—Esta turbina se monta en una cámara de agua *A* análoga á la de las turbinas centrífugas, pero en este caso no existe la cuba que da acceso al agua en el eje en la turbina, estando, por decirlo así, invertido el movimiento del agua. El fluído motor entra lateralmente sobre el contorno exterior de la corona fija, y los filetes líquidos van á confluir radialmente hacia el eje, para escapar verticalmente hacia el centro de la corona móvil (fig. 29).

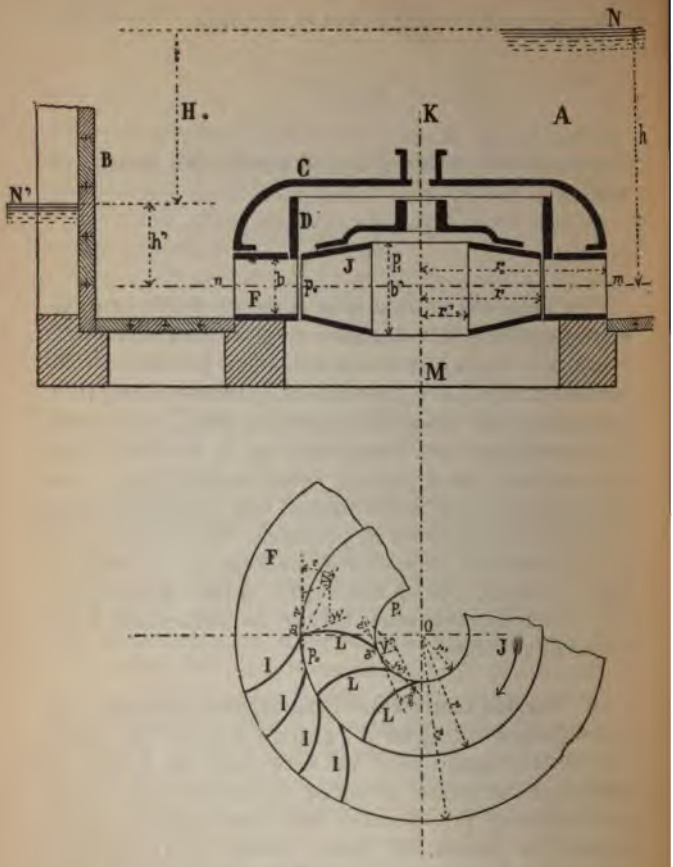


Fig. 29.—Turbina centrípeta.

Así, la corona directriz *F'* está fijada sobre el fondo de la cámara diagonal, y la corona móvil *J*

está colocada concéntricamente á la interior. Es necesario, por lo tanto, que ésta, esté al abrigo de la llegada directa del agua por su centro, y por eso la cuba utilizada en los casos anteriores se sustituye en éste por una especie de campana *C*.

Ésta, fija por sus bordes sobre el perímetro exterior de la corona directriz, es hueca solamente en su centro, para dejar pasar el árbol motor á través de una caja de estopas. La corona móvil está sostenida por un platillo cuyo centro está colocado sobre el árbol.

En el juego que queda libre entre las dos coronas, se puede intercalar una compuerta cilíndrica *D* que, por su movimiento de ascenso y descenso, permite regular el gasto estrechando más ó menos los orificios de los alabes, y hasta suprimir todo acceso del agua en los alabes móviles para detener completamente la turbina.

Como en el caso de la turbina centrífuga, se tiene la relación fundamental

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_a}{d} + h - \frac{p_o}{d}.$$

En esta relación,

V es la velocidad absoluta del agua en el punto a, es decir, á su entrada en el alabe móvil;

p_a es la presión atmosférica;

p_o es la presión hidrostática en el punto a.

El triángulo de las velocidades en el punto a, da, como antes, la relación

$$w^2 = V^2 + v^2 - 2\,V \times v \times \frac{1}{\sqrt{1+i^2}}.$$

designando i, lo mismo que en el caso precedente la inclinación del filete líquido de dirección V sobre la tangente v á la circunferencia de la corona móvil.

Si llamamos I la inclinación de V sobre w é I_1 la de w sobre v, tendremos también como para las turbinas centrífugas

$$\frac{v}{V} = \frac{I}{I_1} \times \frac{\sqrt{1 + I_1^2}}{\sqrt{1 + I^2}}$$

Por otra parte, el triángulo de las velocidades en a da la relación establecida en el caso anterior,

$$V'^2 = w'^2 + v'^2 - 2\,w' \times v' \times \frac{1}{\sqrt{1 + i_1^2}}$$

llamando i_1 á la inclinación de la velocidad relativa w' sobre la velocidad de arrastre v' tangente en a'.

El rendimiento tiene siempre por expresión

$$R = \frac{H - \frac{V'^2}{2g}}{H} = 1 - \frac{V'^2}{2gH}$$

Esta relación demuestra que el rendimiento es tanto mayor cuanto más próximo á cero está V'; si fuera nulo, el rendimiento sería igual á la unidad, y por consiguiente, completo.

Pero hemos visto que V' no puede ser nulo más que con la condición de trazar el alabe móvil L tangente á la circunferencia en a', lo que no pue-

de hacerse sin suprimir enteramente el vertimiento del agua á la salida, en el interior de la corona *J*.

Hay que limitarse, por otra parte, á hacer la inclinación i_1 tan pequeña como se pueda, y hay que llenar además la condición

$$w' = v'$$

suponiendo que la velocidad v' admitida sea ella misma lo bastante grande para asegurar el gasto total de la caída.

Esta relación permite simplificar, como anteriormente, las ecuaciones generales, y se obtienen, en esta hipótesis, las relaciones

$$V = \frac{g \times H}{v} \times \sqrt{1 + i^2}$$

ó, bajo otra forma, dando la velocidad v sobre el perímetro exterior de la corona móvil

$$v = \frac{g \times H}{V} \times \sqrt{1 + i^2}$$

ó también

$$\frac{v}{V} = \frac{g \times H}{V^2} \times \sqrt{1 + i^2}.$$

Encontraremos la misma condición para que una turbina centrípeta funcione sin reacción, como en el caso de una turbina centrífuga, ó sea

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d} + h'.$$

Si la corona no estuviera sumergida, es decir, si estuviera colocada por encima del nivel N', el

valor de h' sería nulo, y la condición anterior se reduciría á

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d}.$$

Se sabe que en el caso en que una turbina funcione sin reacción, se tiene la fórmula

$$V = \sqrt{2\,g\,H}$$

y la condición

$$w = v;$$

resulta de aquí que la relación $\frac{v}{V}$ dada anteriormente, se simplifica y convierte en

$$\frac{V}{v} = \frac{\sqrt{1 + i^2}}{2}.$$

Esta relación $\frac{v}{V}$ que depende únicamente del ángulo de inclinación de las velocidades v y V, una con relación á la otra, permite, como hemos visto, clasificar las turbinas según su velocidad de arrastre con relación á la velocidad absoluta del agua á la salida del alabe director.

Es de mucho interés que la turbina centrípeta esté sumergida. Si el plano medio de la corona móvil está, en efecto, situado á una altura h'' por encima del nivel inferior, la caída real se reducirá en una altura igual y será entonces $(H - h'')$.

El rendimiento será, por lo tanto,

$$R = \frac{H - h'' - \frac{V'^2}{2g}}{H} = \left(1 - \frac{v'^2}{2\,g\,H}\right) - \frac{h''}{H}$$

y la reducción será tanto mayor cuanto más grande sea la fracción de H que h'' representa.

El trabajo útil vendrá disminuído en la misma proporción. Si se designa por Q el número de metros cúbicos gastados en un segundo por la turbina, la expresión de este trabajo es, en el caso de la turbina sumergida

$$T u = 1000 \times Q \times H \times R = 1000\ Q \times \left(H - \frac{V'^2}{2g} \right).$$

y en el caso de la turbina situada fuera del agua

$$T' u = 1000\ Q \times \left(H - \frac{V'^2}{2g} - h'' \right).$$

Es, pues, conveniente, en el caso de caídas pequeñas, colocar la corona móvil por debajo del nivel de estiaje aguas abajo, llegándose así á las mismas conclusiones que para la turbina centrífuga.

El gasto de la corona móvil está siempre dado por la relación

$$Q = m \times K \times 2\pi r' \times b' \times \frac{i}{\sqrt{1 + i_1^2}} \times w'.$$

Depende, por lo tanto, directamente de la velocidad relativa w' á la salida del alabe móvil: pero w' depende á su vez de la velocidad de la periferia exterior de la corona motriz. Se demuestra, en efecto, que se verifica la relación

$$w' = \sqrt{V^2 - v^2 \left(\frac{i}{\sqrt{1 + i^2}} - \frac{r'^2}{r^2} \right)}.$$

Ahora bien; siendo siempre positiva la expresión encerrada en el paréntesis, se deduce que el término en v^2 es también negativo; luego w' disminuirá cuando v aumente y viceversa. Resulta que el gasto Q que varía con w', varía también en razón inversa de la velocidad v.

Esta circunstancia es muy ventajosa porque hace así á la turbina centrípeta autorreguladora. Si la resistencia y la carga disminuyen, la velocidad v tiende á aumentar, pero entonces la velocidad w' y con ella el gasto, disminuye, lo que reduce el trabajo desarrollado por la turbina y vuelve la velocidad al valor de régimen.

Si, por el contrario, es la resistencia la que crece, v tiende á disminuir, en tanto que w' y el gasto de la turbina, crecen y hacen crecer el trabajo motor en la proporción deseada para mantener la velocidad.

Hemos visto que no sucedía esto en las turbinas centrífugas, de modo que resulta una ventaja muy marcada en favor de la turbina centrípeta, que hace preferible este último sistema en el caso en que la carga del motor sea susceptible de sufrir variaciones notables y cuando el trabajo de la fábrica exija una velocidad constante.

41. Jonvalización.—Cuando la turbina centrípeta está sumergida, se puede utilizar por las mismas razones, el procedimiento de la hidroneumatización que hemos estudiado á propósito de la turbina centrífuga.

Hemos visto entonces que si se designa por h'' la diferencia de altura entre el nivel de aguas abajo y el del agua, bajo la campana de la turbi-

na, la relación fundamental se convierte en

$$\frac{V^2}{2g} = H - (h'' - h')$$

siendo H la caída ó diferencia entre los niveles superior é inferior. Esta caída se reduce, pues, en la cantidad $(h''-h')$, es decir, en la mitad de la altura de la corona móvil.

Puede convenir, por el contrario, instalar la turbina por encima del nivel interior, pero se pierde entonces toda la fracción de caída correspondiente. Para evitar este inconveniente, Jonval ha imaginado una disposición conocida con el nombre de jonvalización.

La figura 30 permite formarse una idea de este sistema.

La corona directriz F está instalada sobre el fondo de la cámara de agua en la que termina el canal de llegada. Esta corona está unida por una especie de cuba cónica á un tubo circular T que se encorva á la altura del nivel inferior, y desemboca horizontalmente en el fondo del canal de escape.

El árbol vertical, sobre el cual está montada la corona móvil, gira en un cojinete soportado por la traviesa t que está fija á su vez sobre las paredes del tubo T.

Una compuerta V colocada hacia la salida del tubo, sirve para regular el gasto y también para parar la turbina.

El agua, al salir de la corona móvil, cae en filetes paralelos en el tubo T de Jonval, de tal manera, que la presión en una sección horizontal cualquiera sigue la ley hidrostática, es decir, que todo

sucede como si el conjunto formase dos vasos comunicantes constituídos por el depósito superior de agua, de una parte y el inferior de otra, estando

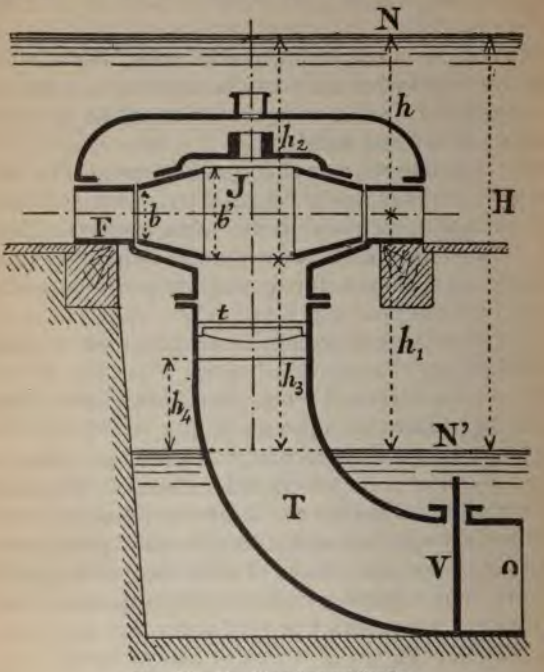


Fig. 30.—Turbina jonvalizada.

estos dos recipientes unidos por el tubo T de caída interpuesto.

En estas condiciones la presión hidrostática p_1 á la salida del alabe móvil en $\vec{a}'$ será (§ 40):

$$p_1 = p_a - d\,h_3.$$

Para que no haya ni entrada ni salida de agua por el juego que existe entre la corona fija y la corona móvil, se debe siempre realizar la condición

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d} - h_1.$$

La relación fundamental

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_a}{d} + h - \frac{p_0}{d}$$

se convierte en

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_a}{d} + h - \frac{p_a}{d} + h_1 = H.$$

Se ve, pues, que la turbina utiliza completamente la caída H, como si la corona móvil estuviera colocada exactamente en el nivel inferior.

La condición esencial para asegurar el funcionamiento de la turbina jonvalizada, es que el nivel inferior se mantenga siempre por encima del borde superior del orificio O del tubo Si fuese de otro modo, la presión atmosférica no se transmitiría ya de manera de sostener la columna líquida, y ésta se rompería, de tal modo, que el nivel del agua en el tubo se colocaría al nivel N' del canal inferior. Así se perdería toda la altura h_3 y la turbina no utilizaría más que la caída $\left(h + \frac{b'}{2}\right)$.

Por otra parte, la relación precedente

$$p_1 = p_a - d\,h_3$$

ó

$$\frac{p_1}{d} = \frac{p_a}{d} - h_3$$

nos demuestra que la columna de agua h_3 debe ser muy inferior á la altura $\frac{p_a}{d}$ correspondiente á la presión atmosférica, porque si la presión $\frac{p_1}{d}$ fuera demasiado pequeña, el aire disuelto en el agua se desprendería y tendría por efecto la rotura de la columna de agua, reduciendo la caída utilizable.

Sin embargo, la pérdida es casi nula si la rotura se produce justamente por debajo de la cara inferior de la corona móvil, y es tanto mayor cuanto más próxima al nivel interior está la sección en que la rotura se produce.

En efecto, en el primer caso se tiene siempre la relación

$$p_1 = p_a - d\,h_3$$

lo que equivale á decir que la presión p_1, al salir del alabe móvil, aumentada en la presión debida á la columna líquida de altura h_3, equilibra á la presión atmosférica en el nivel del depósito inferior.

Pero si la rotura se produce en una sección intermedia, á la altura h_4, por ejemplo, por encima del nivel inferior, la presión hidrostática en el nivel N' en el tubo no se debe ya más que á esta altura reducida, y se tiene por consiguiente

$$p_1 = p_a - d\,h_4.$$

Por último, si la rotura se produjera en N', la relación sería

$$p_1 = p_a - 0 = p_a$$

es decir, que el término sustractivo se anularía y p_1 sería máximo.

Ahora bien, este término p_1 figura en las diversas relaciones que dan las velocidades que hemos tenido que considerar anteriormente; en particular, se tiene para la velocidad relativa w' á la salida del alabe móvil

$$w'^2 = w^2 + v'^2 - v^2 + 2g\left(\frac{p_0}{d} - \frac{p_1}{d}\right).$$

Esta velocidad w', y por consiguiente el gasto, serán tanto más pequeños cuanto más grande sea p_1.

En lugar de considerar la altura h_4 de la sección de rotura, se puede tener en cuenta su distancia $(h_1 - h_4)$ al eje de la corona móvil y hacer

$$h_1 - h_4 = z$$

ó

$$h_4 = h_1 - z.$$

Ahora bien, se tiene de una manera general

$$p_1 = p_a - d\,h_4 = p_a - d\,(h_1 - z),$$

de tal modo, que la relación en w' se convierta en

$$w'^2 = w^2 + v'^2 - v^2 + 2g\left(\frac{p_0 - p_a}{d} + h_1 - z\right);$$

pero la ecuación fundamental

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_a}{d} + h - \frac{p_0}{d}$$

puede escribirse así:

$$V^2 = 2g\left(\frac{p_0 - p_a}{d} + h\right)$$

y teniendo en cuenta la relación en w' resulta

$$V^2 = w^2 - w'^2 + v'^2 - v^2 + 2g\,(H - z).$$

Se vería del mismo modo que es necesario, en todas las ecuaciones de la turbina, sustituir H por $(H - z)$ y considerar que la turbina utiliza solamente la caída $(H - z)$.

Se deduce que el rendimiento teórico es entonces

$$R = \frac{(H - z) - \dfrac{V'^2}{2g}}{H} = 1 - \frac{V'^2}{2gH} - \frac{z}{H}.$$

Se ve que el rendimiento es tanto más pequeño cuanto mayor es z, es decir, cuanto más cerca del nivel inferior está la sección de rotura.

42. Cálculo de una turbina centrípeta.—Las dimensiones principales de una turbina centrípeta se establecen de la manera siguiente:

En primer término, hay que considerar que en una turbina de esta clase el agua penetra horizontalmente en los alabes de la corona móvil, que las venas líquidas se encorvan después y toman una dirección vertical para salir por la sección de radio r' del cilindro interior de la corona móvil (figura 29).

Llamemos u la velocidad de los filetes verticales de esta sección y tendremos, para determinar el radio r' del cilindro, la relación

$$Q = u \times \pi r'^2$$

en la que Q es el gasto por segundo que es conocido. Se da, además, el valor de u por la considera-

ción de que esta velocidad debe ser muy inferior á la V que corresponde á la altura de caída.

Se toma para saltos grandes

$$u = \frac{1}{7} V = \frac{1}{7} \sqrt{2 g H}$$

y para saltos pequeños

$$u = \frac{1}{5} V = \frac{1}{5} \sqrt{2 g H.}$$

Conociendo r' se deducen r y r_0 por las condiciones

$$r = 1{,}5\, r' \text{ á } 2\, r'$$

y

$$r_0 = 1{,}15\, r \text{ á } 1{,}25\, r.$$

El valor b de la altura de los alabes directores viene dado por la relación

$$Q = m \times K + 2\pi r \times b \times \frac{i}{\sqrt{1 + i_1^2}} \times \sqrt{2 g H}$$

y se ve que el valor de b depende del ángulo de inclinación i de la velocidad V de entrada del agua en la turbina sobre la velocidad v de arrastre de la rueda: como esta inclinación debe variar según que la rueda sea de pepueña ó de gran velocidad, se debe fijar primero el tipo que se haya de utilizar.

Determinado así el ángulo de inclinación, se deducirá la velocidad v en la periferia de la corona móvil.

Llamemos n el número de vueltas por minuto y se tendrá

$$n = \frac{60\,v}{2\,\pi\,r}$$

y como por otra parte se verifica que

$$v = \frac{V}{2} \times \sqrt{1 + i_2},$$

se deduce que

$$n = \frac{60\,V}{4\,\pi\,r} \times \sqrt{1 + i^2}$$

fórmula en la cual el valor de V está dado por la relación

$$V = \sqrt{2\,g\,H}.$$

Se trazan los alabes fijos, de tal manera, que el último elemento interior tenga la misma dirección que V, y que el arco así trazado venga á cortar normalmente á la circunferencia exterior.

Se determina la altura b' de la corona móvil á la salida por la relación establecida antes, que da el gasto en función de la velocidad relativa w' á la salida del alabe.

Será necesario asegurarse de que se cumpla en todos los casos la condición necesaria para que no haya ni pérdida ni entrada del agua por el juego que existe entre estas dos coronas, es decir que se tiene que

$$\frac{b'}{b} = \frac{r^2}{r'^2} \times \frac{i}{i_1} \times \frac{2\sqrt{1 + i_1^2}}{\sqrt{1 + i^2}}.$$

Para el trazado de los alabes móviles se construirá en los puntos de división correspondientes, en a, por ejemplo, el paralelogramo de las velocidades cuyos elementos v y V son conocidos, de manera de determinar w, velocidad relativa que da la dirección del primer elemento del alabe móvil.

La dirección del último elemento en el interior de la corona móvil, está dada por w' que se obtiene trazando en el punto escogido el paralelogramo de las velocidades v' w' y V'.

En la práctica se sustituyen los elementos curvos de los alabes directores y móviles á la salida por partes rectas, de manera de asegurar bien la dirección de los filetes líquidos á la entrada y á la salida de los alabes móviles.

43. Turbinas de eje horizontal. — Hasta ahora no hemos hablado más que de turbinas de eje vertical, estando así colocadas las turbinas centrífugas y centrípetas que hemos estudiado. Se pueden también usar turbinas de eje horizontal y la turbina centrípeta se presta muy bien á esta disposición.

La figura 31 hará fácilmente comprender la instalación de una turbina de este tipo. La envolvente de la turbina está constituída por un tambor de eje horizontal A. La corona directriz B no está colocada concéntricamente á las paredes de la envolvente, sino que está, por el contrario, un poco excéntrica, es decir, que el centro de esta corona, que está situado sobre el diámetro horizontal de la sección ó base del tambor, no coincide con el citado centro, sino que se encuentra re-

chazado hacia la derecha, un tercio próximamente de la diferencia de los diámetros.

Resulta de esta disposición que el intervalo comprendido entre las paredes interiores del tambor y la llanta exterior de la corona directriz, forma una espiral anular cuya sección va cons-

Fig. 31.—Turbina centrípeta de eje horizontal.

tantemente disminuyendo de una manera sensible desde el tubo de entrada hasta el otro extremo de la espiral.

Se notará, en efecto, que el agua no penetra por el contorno de la corona directriz como en el caso de la turbina de eje vertical. Siendo en esta últi-

ma la corona horizontal, todos los alabes se abren al mismo nivel y la entrada del agua se hace exactamente en las mismas condiciones para cada una de ellas.

En la turbina de eje horizontal no sucede lo mismo porque la corona es vertical y los distintos alabes están, por lo tanto, á distintas alturas; los situados hacia el extremo superior del diámetro vertical, y más próximos por consiguiente al tubo de entrada, son los primeros que reciben el agua que pasa después á los inferiores á medida que la corriente avanza descendiendo á lo largo del canal anular.

Al llegar á la parte baja de la corona, el agua debe necesariamente volver á subir por la parte de la derecha de la espiral para alimentar la mitad de la corona fija correspondiente. En suma, el agua sigue un circuito cerrado, por decirlo así, en sentido contrario al de las agujas de un reloj.

Se ve así que, cuando la corriente vuelve á subir hacia el tubo, después de un circuito completo, la lámina de agua puede reducirse sencillamente á la cantidad necesaria para alimentar el último alabe. Estas consideraciones justifican la forma en espiral que se da al conjunto del mecanismo.

En resumen, la sección radial de la vena líquida en el espacio anular es en cada punto proporcional al volumen que debe suministrar al resto del desarrollo de la corona fija. El ángulo que forma el primer elemento del alabe con la circunferencia exterior está calculado de tal manera que todos los filetes líquidos conservan la velocidad que tienen en el tubo de llegada. Este tubo, que

viene desde el depósito superior, está cosido con roblones en la envolvente.

El agua, después de haber atravesado los alabes móviles interiores, va radialmente hacia el centro y se escapa por un tubo acodado D que se ajusta normalmente sobre una de las bases del tambor, y cuyo diámetro es igual al de la circunferencia interior.

Cuando la corona móvil presenta dimensiones bastante grandes en anchura, conviene reforzarla y dividir la masa líquida; para esto se funde un platillo que lleva los alabes en sus dos caras, de tal manera, que el agua penetra dividiéndose entre las dos mitades simétricas de la corona móvil. A la salida, el agua va al depósito inferior por dos tubos D colocados simétricamente en cada una de las caras del tambor. Las relaciones entre las diversas cantidades que entran en el funcionamiento de la turbina de eje horizontal, se establecen en las mismas condiciones que anteriormente, pero hay que introducir, sin embargo, algunas modificaciones inherentes á la posición misma.

Admitamos que la relación característica del funcionamiento sin reacción se realice; tendremos, por consiguiente,

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d} + h'.$$

La relación que da el valor de la velocidad w' á la salida de los alabes móviles, es entonces:

$$w'^2 = w^2 + v'^2 - v^2.$$

Consideremos en el caso de la turbina con eje ho-

rizontal, dos alabes a_1 y a de la corona móvil, colocados en los dos extremos de un mismo diámetro. Estos dos alabes se encuentran generalmente á niveles diferentes, y además, mientras que el agua va de arriba á abajo y cae, por consiguiente, en el alabe más elevado, se mueve en sentido inverso, es decir, subiendo en el alabe inferior.

Así, en el primer caso, la velocidad w' deberá aumentarse en la aceleración debida á la altura de caída igual al espesor de los alabes, y en el segundo caso esta velocidad deberá disminuirse en la misma aceleración.

Llamemos h'' esta altura de caída y se deberá tener, por lo tanto,

$$w'^2 = w^2 + v'^2 - v^2 \pm 2\,g\,h''.$$

Hay que considerar, sin embargo, que h'' no es igual á la diferencia de los radios $(r - r_1)$ más que para los dos alabes situados en los extremos del diámetro vertical. Para pares distintos de alabes, la altura h'' será tanto más pequeña cuanto más se aproxime el diámetro correspondiente al horizontal.

Para tener la expresión general de esta altura de caída, tracemos por el alabe m, por ejemplo, el radio que termina en su centro, radio que forma un ángulo g con el diámetro vertical. La altura de la cual caerá el agua en este alabe no será más que la proyección sobre la vertical del alabe m, y si llamamos i la inclinación de este radio, se tendrá para el alabe considerado

$$h'' = (r - r_1) \times \frac{1}{\sqrt{1 + i^2}}$$

de suerte, que en realidad la relación precedente deberá escribirse así:

$$w'^2 = w^2 + v'^2 - v^2 \pm 2g\,(r - r_1) \times \frac{1}{\sqrt{1 + i^2}}.$$

Pero es fácil de ver que en el caso en que la turbina recibe el agua sobre todo su contorno, los términos positivos que corresponden á la mitad de la corona móvil situada por encima del diámetro horizontal, son iguales en número y valor á los negativos, y por lo tanto, se compensan, no habiendo lugar á tener en cuenta estas consideraciones más que cuando la turbina recibe el agua solamente por una parte de la circunferencia.

Para evitar toda pérdida de caída que pueda provenir de que la boca inferior de los tubos D estuviera por encima del nivel de aguas abajo, caída igual á la distancia vertical que separa este nivel del centro de la turbina, se aplicará la disposición de Jonval, descrita anteriormente.

En realidad la envolvente debe tener la forma, no de un tambor circular, sino de un volumen cuya sección es una espiral de Arquímides. Esta es la condición necesaria para que la sección de paso del agua en el espacio anular esté en razón inversa de la cantidad que debe suministrar á la corona directriz yendo al encuentro del movimiento del agua. Entonces la velocidad del agua será constante para todas las secciones de la envolvente.

Si designamos por Q el gasto en una sección cualquiera, por l la anchura de la envolvente, por $r = r_1$ el radio exterior de la corona y R el radio

vector de la envolvente en la sección considerada, se tendrá que

$$Q = (R - r_0) \times l \times v.$$

Cuando se pasa de una sección meridiana á la siguiente, el aumento q del gasto debe ser proporcional al crecimiento de la superficie del orificio de los alabes directores que depende á su vez del aumento del ángulo en el centro a que forma el radio vector con el radio en el origen, de tal manera, que llamando K un coeficiente de proporcionalidad, se tendrá que

$$q = K \times a.$$

Pero se tiene también, llamando r el crecimiento correspondiente del radio vector

$$q = r \times l \times v$$

de donde

$$K \times a = r \times l \times v$$

y

$$r = \frac{K}{l \times v} \times a.$$

Ahora bien, en el origen, el radio vector se reduce á r_0, luego se aumenta á r y se tiene de una manera general

$$R = r_0 + \frac{K}{l \times v} \times a.$$

Queda por determinar el coeficiente K. El gasto

total Q se compone necesariamente de la suma de los crecimientos sucesivos q cuando el ángulo del radio vector varía de 0 á 2π y se tendrá, por lo tanto,

$$Q = K \times 2\pi$$

y como este volumen debe pasar por los orificios de los alabes directores, se tiene del mismo modo, deducción hecha del espacio ocupado por los N alabes de espesor e

$$Q = (2\pi r_0 - N e) \times l \times v = K \times 2\pi$$

de donde se saca

$$K = \frac{(2\pi r_0 - N e) \times l \times v}{2\pi}$$

y sustituyendo K en la expresión de R, queda finalmente

$$R = r_0 + \frac{2\pi r_0 - N e}{2\pi} \times a + r_0$$

y si se desprecia el término $N e$

$$R = r_0 \times a + r_0 = (r_0 + 1) \times a.$$

Se determina también la envolvente como hemos dicho antes, de tal modo, que todos los filetes corten bajo un mismo ángulo á la circunferencia exterior de la corona. Para realizar esta condición es necesario que el elemento de envolvente situado á la derecha de cada radio vector que pasa por el

extremo del alabe fijo forme un ángulo constante con la normal á este radio vector. Si se toma precisamente este ángulo para dirección del primer elemento del alabe, el filete líquido dirigido por la envolvente cortará á la circunferencia exterior como hemos dicho antes.

Para construir la envolvente de círculo se trazará una circunferencia concéntrica á la turbina, y cuyo radio esté determinado por la relación

$$r = r_1 \times \frac{i}{\sqrt{1 + i^2}}$$

representando por i la inclinación de la velocidad V sobre la tangente á la circunferencia de la corona móvil. Los alabes directores están ellos mismos formados por fracciones de la misma envolvente.

Es bastante difícil de fundir una envolvente de círculo, y se sustituye generalmente este trazado por una envolvente circular concéntrica á las coronas directriz y móvil. El resultado es un poco menos favorable, pero la sencillez y la economía de construcción son mucho mayores.

Conviene calcular la sección de entrada de tal manera, que la velocidad del agua no pase de 3 ó 4 metros con objeto de reducir todo lo posible las pérdidas de carga debidas á rozamientos contra las paredes.

44. Turbina paralela.—En los tipos anteriormente estudiados el agua se dirigía radialmente en el motor, ya fuera del centro á la periferia ó viceversa. La turbina paralela de que ahora nos ocupamos se llama así porque los filetes líquidos, tanto en

alabes directores como en la corona móvil se mueven paralelamente al eje del motor.

La disposición más general es la de la turbina de eje vertical. En este caso las dos coronas directriz y móvil deberán estar, por lo tanto, superpuestas como se indica en la figura 32.

La turbina está colocada en una cámara de agua cuyas paredes laterales están constituídas

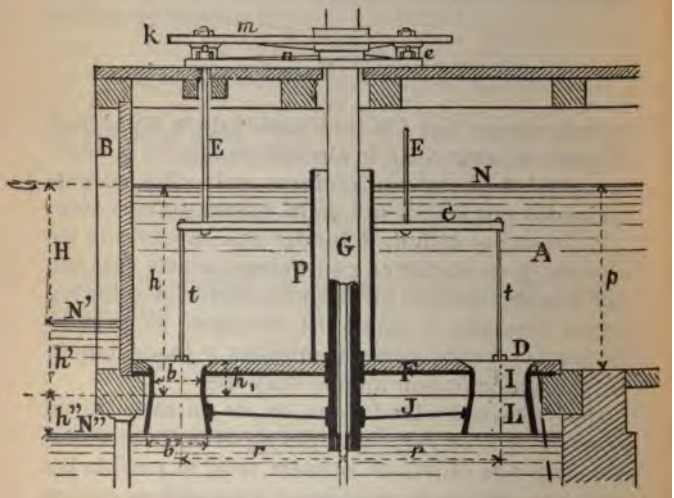


Fig. 32.—Turbina paralela.

por la prolongación de los muros laterales del canal de llegada del agua. Esta cámara está cerrada por su parte inferior por un tabique de contención *B*. La armadura que constituye el fondo de la cámara citada descansa sobre los muros laterales del canal, sobre el muro de sostenimiento de aguas

arriba, y sobre columnas que se apoyan en el fondo del canal de escape. La corona directriz F va cosida al fondo de la cámara de agua. La corona móvil J, directamente colocada debajo, está montada por su centro, sobre un árbol hueco de fundición G que está á su vez suspendido de un pivote superior, girando sobre la parte superior del núcleo central de hierro forjado que se apoya sobre el fondo del canal de escape.

El cilindro P está destinado á impedir que el agua entre por el espacio que queda entre la corona fija y el árbol: éste va hasta la superficie del suelo y allí se aprovecha y transforma su movimiento.

Esta turbina está provista de un sistema de compuertas constituído por diafragmas verticales colocados detrás de cada uno de los alabes directores: todas estas compuertas están colgadas por varillas t de un círculo c el cual está á su vez sostenido por tres barras E fileteadas en su parte superior: cada una de estas barras lleva una tuerca e y un piñón dentado k, y estos tres piñones engranan con una rueda m que los mueve á los tres á la vez, y según cual sea el sentido de movimiento de esta rueda así suben ó bajan las compuertas.

Las relaciones entre las diversas velocidades que hay que considerar en el funcionamiento de la turbina son análogas á las que se refieren á las turbinas centrífugas: la única diferencia consiste en que siendo iguales los radios de las dos coronas habrá que hacer en las fórmulas precedentes, $r = r'$.

En particular la ecuación que da la velocidad V del agua en la corona móvil será:

$$V^2 = w^2 - w'^2 + 2gH$$

en la cual w es la velocidad relativa con que el agua entra en la corona móvil, w' la velocidad relativa del agua á la salida de la misma corona, y H la diferencia de altura entre los niveles de aguas arriba y abajo N y N'.

Admitiendo la condición $w' = v$ se encuentra la relación

$$v = \frac{H}{V} \times g \times \sqrt{1 + i^2}$$

llamando i á la inclinación de la velocidad relativa w sobre la velocidad horizontal v de arrastre de la turbina.

Para que no haya ni pérdida de agua ni entrada del agua de abajo en la corona móvil por el juego que hay que dejar entre las dos coronas, para evitar rozamientos inadmisibles se debe tener como siempre la condición

$$\frac{p_a}{d} = \frac{p_a}{d} + h'$$

lo cual quiere decir que la presión hidrostática que se ejerce de arriba á bajo sobre el plano de separación de las dos coronas, debe estar equilibrada por la presión inversa de abajo á arriba que procede de la presión atmosférica, y del exceso de elevación del nivel inferior con relación al citado plano de separación.

Se demuestra que para que sea así, es necesario que el ángulo de inclinación i, antes considerado, sea por lo menos igual á la mitad del ángulo de inclinación del último elemento del alabe móvil sobre el horizonte.

Realizándose la condición anterior, la relación fundamental

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{p_a}{d} + h - \frac{p_0}{d}$$

se convierte en

$$V^2 = 2\,g\,H$$

ó

$$V = \sqrt{2\,g\,H}$$

y la relación dada antes

$$v = \frac{H}{V} \times g \times \sqrt{1 + i^2}$$

se reduce á

$$v = \frac{V \times \sqrt{1 + i^2}}{2}.$$

Estas condiciones corresponden, como sabemos, al caso del funcionamiento de la turbina sin reacción.

El rendimiento toma una forma más sencilla, si se tiene en cuenta que los radios r y r' son iguales.

En efecto, se tiene que

$$R = 1 + \sqrt{\frac{1 + i_2}{1 + i_1^2}} - \sqrt{1 + i_2}$$

en la que i es la inclinación de w é i_1 la inclinación de w' sobre la velocidad horizontal v.

Supongamos, por ejemplo, que las dos inclinaciones i é i_1 sean iguales á 0,58 m., lo cual corresponde á un ángulo de 30 grados y el rendimiento será entonces

$$R = 1 + 1 - \sqrt{1 + 0{,}33} = 2 - \sqrt{1{,}33} = 0{,}85$$

ó sea 85 por 100.

En efecto, el rendimiento varía de 93 á 73 por 100 según que se trate de turbinas de pequeña ó de gran velocidad.

Cuando el gasto de la corriente de agua es variable, hay que reducir el gasto de la turbina cerrando parcialmente todas las compuertas con objeto de mantener el nivel superior N á una altura constante: pero resulta una contracción de la vena líquida al pasar las compuertas y un ensanchamiento brusco á la entrada de los alabes móviles: estos efectos corresponden á pérdidas de carga que reducen el rendimiento en un 15 ó 20 por 100. Estas compuertas no son, por lo tanto, adecuadas á corrientes de agua cuyo gasto es variable.

Hemos supuesto en lo que precede que el nivel inferior N' era superior al plano de separación de las dos coronas, pero podría estar á la misma altura y aun más bajo que la cara inferior de la corona móvil, y la turbina se llama entonces *no sumergida*.

Refiriéndose á la figura se ve que, en este caso, la caída se convierte en

$$H = h + h''.$$

La relación característica de la marcha sin reacción es aquí sencillamente

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d}$$

y resulta del mismo modo la igualdad

$$V = \sqrt{2\,g\,H}$$

que indica, como debe ser en este caso, que la ve-

locidad absoluta de movimiento del agua en la turbina es la que se debe á la altura total de caída h.

Se podría observar, sin embargo, que h no constituye en realidad la altura de caída completa puesto que la corona móvil emerge toda la altura h'' por encima del nivel inferior. Pero hay que tener en cuenta que en la turbina paralela esta caída no se pierde, puesto que se utiliza en producir la aceleración de la velocidad relativa sobre los alabes de la corona móvil.

No hay que deducir, sin embargo, que se puede dar á la altura h'' de la corona móvil un valor cualquiera, porque el rendimiento depende de esta altura y conviene hacer h'' muy pequeño con relación á la caída H cuando la turbina gira fuera del agua.

Cuando la turbina paralela se monta en un punto de la caída intermedio entre los niveles superior é inferior, se puede aprovechar á pesar de esto la totalidad de la caída, utilizando la disposición de Jonval que hemos estudiado apropósito de la turbina centrípeta.

Si la turbina debe girar sumergida, se la pueden asegurar del mismo modo las ventajas de la marcha á libre desviación, aplicándola el aparato hidroneumático de Girard, que tiene por objeto sumergir la turbina bajando el nivel del agua bajo la corona móvil por medio del aire comprimido.

Se tiene siempre en este caso

$$V = \sqrt{2g\,(H - h'')} - \sqrt{2g\,h}$$

resultado parecido al que se obtiene cuando la corona móvil está encima del nivel inferior.

45. Sistemas de compuertas.—El sistema de compuertas verticales aplicado á la turbina paralela ó de Fourneyron (fig. 32), se llama de *compuertas parciales,* porque estos obturadores sólo cierran parcialmente las secciones de salida de los alabes directores.

Esta disposición tiene por objeto producir al paso de las compuertas, bajadas en parte, una contracción de las venas líquidas seguida de un ensanchamiento brusco en los alabes de la corona móvil que dan lugar á pérdidas de carga y disminuyen por consiguiente el rendimiento de la turbina. La reducción puede llegar al 15 ó 20 por 100 cuando el gasto disminuye la mitad.

Esta clase de compuertas no son, por lo tanto, adecuadas para una turbina colocada en una corriente de agua cuyo gasto es variable cuando hay que reducir el del motor hidráulico para mantener el nivel superior H á una altura constante.

Se han imaginado varios sistemas para evitar estos inconvenientes.

Por ejemplo, Kœchlin, ha tratado de reducir la anchura b de los orificios en toda la altura de los alabes, insertando en los de la corona directriz cuñas obturadoras que sirvan para reducir el gasto. Pero este procedimiento no permite proporcionar el gasto de las turbinas á las variaciones continuas de una corriente de agua, y tiene el inconveniente de exigir la parada de la turbina para colocar ó quitar las cuñas obturadoras.

Con la misma finalidad ha construído Fontaine, turbinas con dobles coronas concéntricas fundidas en un solo cuerpo, las cuales se maniobran con dos sistemas de compuertas independientes, que se

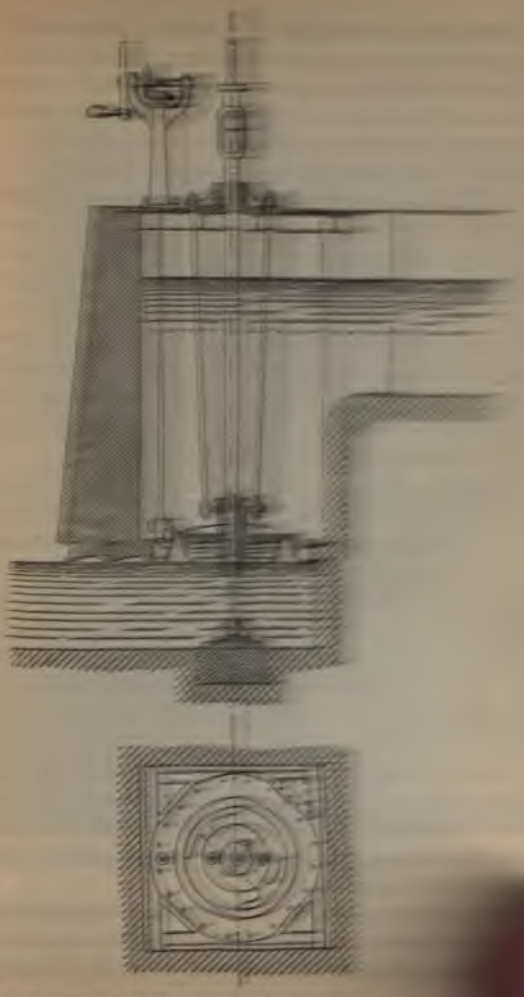


Fig. 31.—Turbina con compuerta de [illegible]

abren separadamente ó al mismo tiempo según la importancia del gasto de la corriente de agua.

Los *distribuidores* ideados por Girard consisten en un cierto número de obturadores planos en forma de segmentos colocados horizontalmente á todo alrededor de la corona directriz. Por medio de un mecanismo adecuado se hacen deslizar los distribuidores, diametralmente opuestos dos á dos, según los radios de la turbina, de manera que los orificios correspondientes queden completamente abiertos ó cerrados: se evitan así las contracciones debidas á la reducción parcial de los orificios, pero no se puede hacer variar el gasto de la turbina más que por octavas, décimas ó dozavas partes, según el número de compuertas, y no de una manera continua.

Otra disposición debida á Girard, es la compuerta de *doble mariposa*. Se compone de dos segmentos circulares que tapan cada uno la cuarta parte de la corona directriz y que están unidos por brazos radiales soportados por un núcleo que puede girar alrededor del manguito de la corona directriz (fig. 33). El movimiento se consigue por medio de una manivela que acciona el árbol de un piñón que engrana con los dientes de una de las alas de la compuerta.

La corona directriz presenta solamente orificios sobre dos cuadrantes opuestos de la circunferencia, siendo macizos los otros dos, que reciben las alas de la mariposa cuando la compuerta está enteramente abierta.

En el caso de una corriente de agua de gasto muy variable, es preferible, desde el punto de vista del rendimiento, abrir un pequeño número de

orificios correspondiente al menor caudal, á un solo lado de la turbina. Se obtiene este resultado

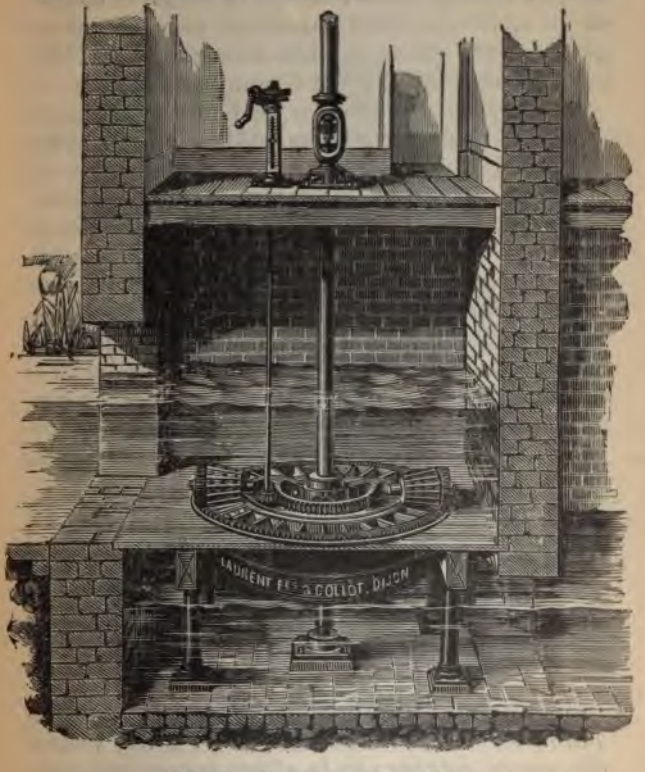


Fig. 34.—Compuerta de rodillos.

haciendo las dos alas independientes y moviendo cada una por un tren especial de engranajes.

La figura 33 deja ver la disposición general de

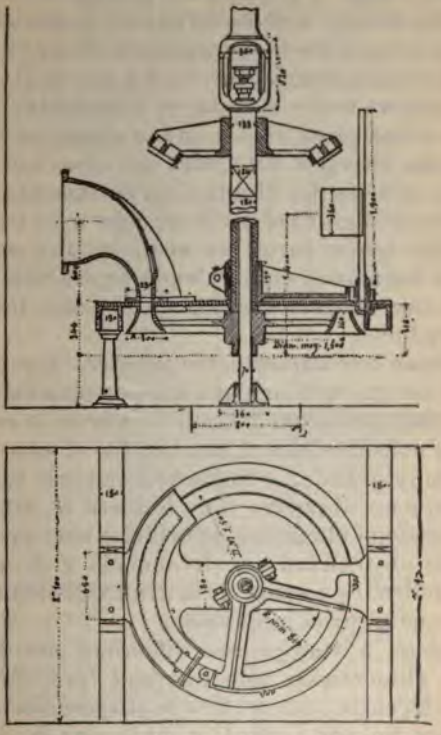
una turbina paralela de tres caballos de potencia provista de compuerta de doble mariposa. Este sistema tiene el inconveniente de exigir el empleo de un motor de doble capacidad para un mismo gasto, puesto que no permite alimentar la turbina por más de la mitad de la circunferencia.

La *compuerta de rodillos* de Fontaine, subsana este defecto de incompleta utilización. Un disco dentado que puede girar alrededor del centro de la corona directriz, está provisto de dos brazos terminados por dos horquillas cuyos ejes, situados en el mismo diámetro, llevan dos rodillos troncocónicos, á los que se enrollan dos bandas circulares de caucho ó de gutapercha, las cuales, cuando el mecanismo citado gira, tapan ó destapan sucesivamente todos los orificios de la corona directriz: la turbina puede recibir así el agua en todo su contorno salvo el pequeño espacio que los rodillos ocupan al fin de la maniobra de enrollamiento de las bandas.

Merece citarse también el sistema en el que las compuertas se sustituyen por válvulas que pueden abrirse ó cerrarse basculando alrededor de ejes horizontales, y también las compuertas americanas formadas por los mismos alabes directores con una disposición especial.

46. Diversas disposiciones de las turbinas paralelas. *Turbina con sifón.*—En el caso de saltos pequeños, puede suceder que la altura por encima de la corona directriz sea inferior á un metro: se forman entonces sobre los orificios torbellinos y embudos que determinan un arrastre del agua y perturbaciones en el movimiento de las venas líquidas, lo

e tiene por efecto el reducir el gasto y dismi-
r el rendimiento de la turbina.
Hay entonces necesidad de sumergir la turbina



g. 85.—Turbina con alimentación parcial. *(Alzado y planta.)*

por lo tanto, de hacer artificialmente que quede
ra del agua por medio del aire comprimido, á
de asegurar su funcionamiento en el estiaje, en

el que, á consecuencia de la disminución del gasto, no puede ser alimentada más que por una parte de la circunferencia. Además, la sumersión del aparato obliga á trabajos de profundización del canal de escape, á veces difíciles y costosos.

Para evitar estos inconvenientes, Girard ha imaginado el alimentar la corona fija por medio de un sifón, que va desde el canal de llegada del agua á unirse á una pieza anular que se ajusta encima de la corona directriz. La altura del agua que recubre los orificios del distribuidor se aumenta así en la diferencia entre el nivel superior y el extremo del sifón: éste se carga por medio de una pequeña bomba neumática cuyo tubo de aspiración va sujeto á una tubería fundida en el punto más alto del conducto.

Turbina con alimentación parcial.—Las dimensiones de una turbina para una potencia dada, son tanto más pequeñas cuanto mayor es la caída y menos considerable el caudal. En el caso de un salto muy grande, se llegaría á emplear turbinas de pequeño diámetro si no hubiera la dificultad que ocasiona el empleo de orificios muy pequeños que se obstruirían con frecuencia y de pivotes muy delicados á causa de la gran velocidad á que tiene que girar el mecanismo.

Se llega á vencer esta dificultad usando turbinas alimentadas sólo por una fracción de la circunferencia, empleando la disposición ideada con este fin por Girard, y de la que da idea la figura 35.

El tubo horizontal de llegada del agua va cosido á un inyector acodado, cuyo orificio de salida se desarrolla en forma de segmento de corona circu-

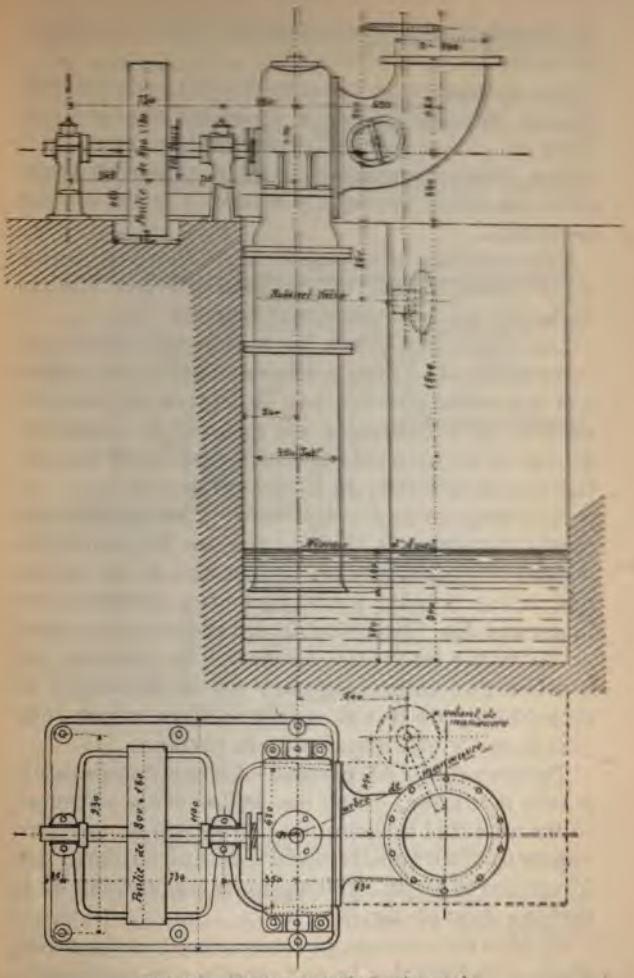


Fig. 36.—Turbina de eje horizontal.

lar recubriendo próximamente el tercio del contorno de la corona directriz.

Las compuertas están constituídas por un distribuidor circular unido á un sector dentado que lleva un pivote sobre el centro de la corona fija y cuyos dientes engranan con un piñón montado sobre un árbol vertical y movido por un volante manivela.

Esta turbina debe estar siempre fuera del agua, y por consiguiente, ha de instalarse por encima del nivel más alto del canal inferior.

Las relaciones sobre las turbinas paralelas no sumergidas, se aplican enteramente á la turbina con inyección parcial, con la reserva de tener en cuenta, en la expresión del gasto Q, la condición de que la turbina sólo está alimentada por una determinada fracción de la circunferencia.

Si se dispone de dos saltos de altura diferente, se puede alimentar la turbina por dos inyectores laterales correspondientes á cada una de las caídas que vayan á pasar á dos segmentos simétricos de la corona fija. Es necesario entonces tener cuidado de trazar los alabes directores de manera que se obtengan valores iguales de la velocidad de rotación v y de la velocidad relativa w con relación á una y otra sección de la turbina.

Turbina de eje horizontal.—La turbina paralela puede montarse, como las de los otros sistemas, sobre un árbol horizontal. El aparato se encierra entonces enteramente dentro de una cubierta que forma parte de un sifón según la disposición de la turbina Jonval (fig. 36).

El sifón se compone de tres partes: el tubo de llegada, á la derecha, la envolvente que contiene la

turbina y el tubo vertical del sistema Jonval que entra en el nivel inferior.

El eje horizontal de la turbina gira en tres cojinetes, uno de los cuales está sujeto al interior de la envolvente.

Uno de los dos exteriores sirve de tope para re-

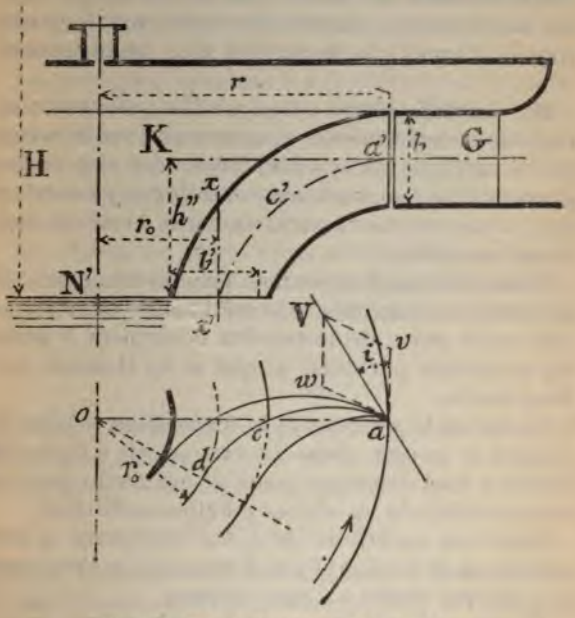


Fig. 37.—Principio de la turbina mixta.

sistir al empuje horizontal del agua sobre la corona móvil. La polea de transmisión va colocada entre los dos cojinetes exteriores.

No se puede aplicar á estas turbinas, ni las com-

puertas parciales ni la libre desviación que implica la rotación en el aire. Este sistema no puede, por tanto, utilizarse ventajosamente en una corriente de agua de caudal variable.

En el caso de una caída grande se puede aplicar á esta turbina el sistema de la inyección parcial: conviene entonces, para evitar toda pérdida de caída, hacer que se sumerja la corona móvil en una cantidad igual á la flecha del arco de inyección.

47. Turbinas mixtas.—En los tipos que hemos estudiado anteriormente, el agua entra radialmente en la turbina, ya sea alejándose del eje, ya sea acercándose á él (turbinas centrífugas y centrípetas), ó bien se mueva paralelamente á este eje (turbinas paralelas).

Desde hace algunos años, los constructores, en América especialmente, han ideado un sistema que tiene parte de la turbina centrípeta y parte de la turbina paralela, al que se ha llamado *turbina mixta*.

La figura 37 representa la disposición teórica de un motor de esta clase. La corona fija ó directriz exterior está dispuesta como de ordinario, pero la construcción de los alabes móviles es distinta.

Estos son, en efecto, de doble curvatura y presentan en su conjunto una forma que le aproxima á la de una hélice ó á una cuchara.

El agua, al salir de los alabes directores, entra primero radialmente en la corona móvil aproximándose al eje de rotación y después cae paralelamente al eje según la dirección $a' c' x'$ en proyección vertical y la dirección $a c d$ en proyección horizontal.

En a y a' el primer elemento del alabe es tangente á la dirección de la velocidad relativa w. Se ve, además, que la línea media del alabe se encurva según $a\,c\,d$, de tal manera, que el último elemento de este alabe en d forma con el plano horizontal un ángulo que es siempre muy pequeño. Este ángulo no es otro que el que forma el filete líquido con la superficie del nivel inferior á la salida del agua de la turbina.

La velocidad absoluta V á la entrada en el alabe de la corona móvil, forma un ángulo i con la velocidad v en la circunferencia exterior de esta corona.

Las fórmulas relativas al funcionamiento de esta turbina se deducen fácilmente de las de la turbina centrípeta.

En el caso en que el agua actúa sin reacción, la condición de la igualdad entre la presión hidrostática en a y la presión atmosférica, se realiza y se tiene

$$\frac{p_0}{d} = \frac{p_a}{d}$$

de donde resulta la condición de igualdad entre la velocidad relativa w y la velocidad en la circunferencia v. Se tiene, por lo tanto,

$$V^2 = 2g\,(H - h'')$$

puesto que la velocidad absoluta á la salida del alabe director se debe á la carga $(H - h'')$ que pesa en a' sobre el nivel $G\,K$.

La velocidad relativa de entrada del agua en la corona móvil está dada por la relación

$$w'^2 = V^2 + v'^2 - 2 \times V \times v \times \frac{1}{\sqrt{1 + i^2}}$$

llamando i la inclinación de la velocidad v sobre la absoluta V.

La velocidad relativa del agua á la salida de la corona móvil, será

$$w'^2 = w^2 + v'^2 - v^2 + 2gh''.$$

Se ve que, comparativamente al caso de la turbina centrípeta, la velocidad w' se encuentra aumentada en la velocidad debida á la altura de caída h'' entre los niveles $G\,K$ y N'.

La velocidad absoluta del agua á la salida de la corona móvil es siempre

$$V'^2 = w'^2 + v'^2 - 2\,w' \times v' \times \frac{1}{\sqrt{1 + i_1^2}}$$

llamando i al ángulo del último elemento del alabe móvil con el plano horizontal.

Por último, el rendimiento teórico de la turbina será

$$R = 1 - \frac{V'^2}{2gH}.$$

La turbina mixta puede ser montada, sea con el eje horizontal, sea con el eje vertical, é instalarse, según la disposición de Jonval, en un punto intermedio de la caída entre el nivel superior y el inferior. Se presta igualmente al empleo de la hidroneumatización, permitiendo su funcionamiento aun en el caso de una sobreelevación del nivel inferior.

En las turbinas mixtas las directrices de la corona fija afectan la forma rectilínea, y su primer elemento, en lugar de ser normal á la circunferencia exterior de la citada corona, tiene una dirección oblicua. Sin embargo, estos alabes no están constituídos por simples paletas planas; para disminuir la contracción á la entrada de la corona fija se les da, en efecto, una sección lenticular, ó por lo menos redondeada hacia el interior.

La primera dimensión que hay que determinar es el diámetro del tubo de evacuación de la turbina. Para ello se fija la pérdida debida á la velocidad de salida V'; si la pérdida consentida es de 4 por 100 del trabajo teórico total, se tiene

$$R = 1 - \frac{V'^2}{2gH} = 1 - 0{,}04$$

de donde

$$V'^2 = 0{,}04 \times 2gH$$

y

$$V' = 0{,}2\sqrt{2gH} = 0{,}886\sqrt{H}$$

La sección S del tubo de evacuación será, por lo tanto,

$$S = \pi r = \frac{Q}{V'} = \frac{Q}{0{,}2\sqrt{2gH}}$$

de donde

$$r' = \sqrt{\frac{Q}{0{,}2\,\pi\sqrt{2gH}}}$$

Si la turbida marcha sin reacción, resulta de la condición $v = w$, por ser isósceles el triángulo de

las velocidades, que la velocidad V está dirigida según la bisectriz del ángulo formado por las velocidades v y w, y si se designa por g el ángulo de w con la tangente en a, es decir, con la dirección de v se tiene la relación

$$g + 2\,i = 180 \text{ grados}$$

de donde

$$g = 180 - 2\,i.$$

Como i varía generalmente entre 25 y 30 grados, se ve que g varía á su vez en este caso, entre 140 y 120 grados. Esto es, por lo tanto, también lo que caracteriza la turbina por acción, porque esta condición llevada á las fórmulas generales produce la igualdad

$$V = \sqrt{2\,g\,H}$$

que da el valor de la velocidad absoluta del agua á la salida del distribuidor en el caso del funcionamiento sin reacción.

Llamemos n el número de directrices, e á su espesor, i á la inclinación de la vena líquida á su entrada en la corona móvil y m á un coeficiente de contracción que varía entre 0,80 y 0,95 según el estado y la naturaleza de las superficies de los alabes.

La dimensión horizontal de la sección de salida del distribuidor no es otra que la proyección de los arcos de circunferencia sobre la normal á la velocidad absoluta V; la longitud total es, por lo tanto,

$$l = 2\,\pi\,r \times \frac{i}{\sqrt{1 + i^2}}.$$

Pero hay que restar los espesores de los alabes, de manera que la sección total de salida será

$$S = 2\pi r \times \frac{i}{\sqrt{1+i^2}} - n\,e$$

y el gasto vendrá dado por la fórmula

$$Q = m \times 2\pi r \times \left(\frac{i}{\sqrt{1+i^2}} - n\,e\right) \times b \times V.$$

En esta expresión se conocen todas las cantidades, (especialmente el gasto Q que es un dato y la velocidad V que resulta del valor de la caída H) menos la cantidad b que puede, por lo tanto, determinarse.

Si la turbina es de reacción no se satisfacen las fórmulas anteriores; el ángulo g es, pues, menor que 120 grados, y la velocidad V es más pequeña que la que se debería á la altura de caída H.

Recordemos que se llama entonces grado de reacción á la expresión

$$K = \frac{1}{\sqrt{2gH}}$$

de donde

$$V = K \times \sqrt{2\,g\,H}.$$

Supongamos que g sea igual á 90 grados, por ejemplo; entonces el triángulo de las velocidades es rectángulo, y se tiene que

$$v = V \times \frac{1}{\sqrt{1+i^2}}$$

y se encuentra que en estas condiciones el grado de reacción tiene por valor

$$K = \frac{0{,}707}{\sqrt{1 + i^2}}$$

Como la velocidad real varía entre 0,8 y 0,9 de la velocidad teórica, se puede, por último, escribir que

$$V = 0{,}8 \text{ á } 0{,}9 \; K \times \sqrt{2gH}.$$

Si el ángulo i varía entre 25 y 30 grados, K variará entre 0,750 y 0,815, y la velocidad V será por término medio

$$V = 0{,}650 \sqrt{2gH}$$

Resulta que en el caso que nos ocupa la sección de paso del distribuidor, deberá satisfacer á la relación

$$Q = \left(2\pi r \times \frac{i}{\sqrt{1 + i^2}} - ne\right) \times b \times 0{,}650 \sqrt{2gH}.$$

De la misma manera se determinará así la altura b de la corona directriz. Se dividirá en seguida la circunferencia de radio r en tantas partes iguales como alabes directores deba haber y se trazarán éstos dando sobre la circunferencia interior la inclinación i comprendida entre 20 y 30 grados.

Quedará únicamente trazar los alabes móviles, lo cual es muy complicado, limitándonos á indicar su fundamento en el párrafo siguiente.

48. Trazado de los alabes móviles. — En las turbinas ordinarias los alabes móviles están constituídos por superficies cilíndricas ó en forma de cono, y la arista de salida es siempre recta é igual á la altura de la corona móvil. Hemos visto que, por el contrario, en las turbinas mixtas los alabes tienen

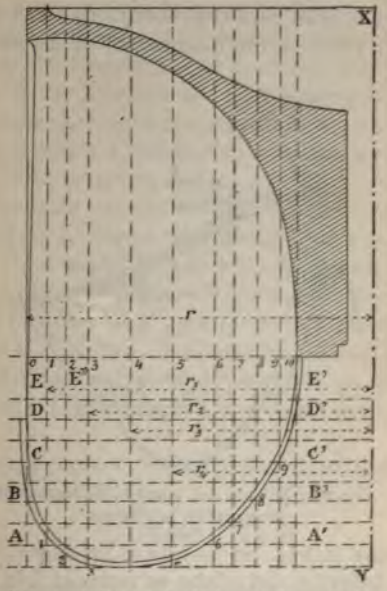


Fig. 38.—Dibujo del trazado de los alabes: perfil vertical.

la forma de hélices, de suerte que el perímetro de salida es curvilíneo y presenta un gran desarrollo.

Lo que caracteriza el trazado de los alabes de las turbinas mixtas es que, lo más generalmente, la velocidad relativa de entrada del agua en la

corona móvil está dirigida normalmente á la circunferencia, es decir, según el radio, en tanto que en las demás turbinas ordinarias, la velocidad relativa w está más ó menos inclinada sobre la tangente á la circunferencia. El ángulo g es entonces de 90 grados, mientras que está comprendido entre 120 y 140 grados en las turbinas de Girard.

Esto es lo que está representado en la figura 39, que es la proyección horizontal de un alabe móvil

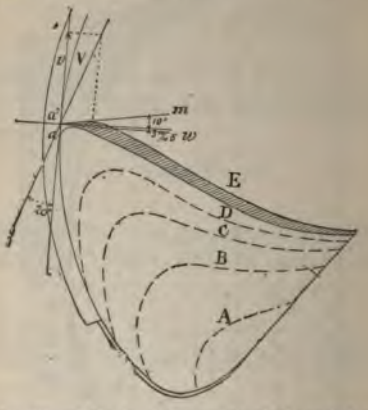


Fig. 39.—Dibujo del trazado de los alabes, proyección horizontal.

de turbina mixta. Se ve que el primer elemento de la cara inferior del alabe es normal á la tangente v, puesto que debe ser el mismo tangente á la velocidad relativa w.

El primer elemento de la cara exterior es tangente á la línea $a'm$, que forma un ángulo de 10 grados con la dirección de la velocidad w y á una distancia de 3,5 milímetros de la cara interior.

Los trazados del perímetro de salida del alabe y de la forma de ésta, presentan, por consiguiente, dificultades bastante grandes.

Se da, en primer término, el perfil vertical del alabe, tal como está representado en la figura 38, en el cual el contorno $E D B A\ B' C' E'$ representa la proyección del alabe sobre un plano vertical que pase por el eje de la turbina.

Para determinar la proyección horizontal se hace lo siguiente: Se divide la anchura $A A'$ del alabe en un cierto número de partes iguales; á cada una de estas partes corresponden láminas líquidas cuyos ejes están á distancias variables r_1, r_2, r_3, r_4, del eje de rotación $X Y$.

Consideremos en particular el filete que se proyecta según la línea vertical número 1; éste ha entrado en el alabe con la velocidad relativa w y saldrá de él por el punto de encuentro de esta vertical con la línea $A A'$, siendo en él su velocidad de salida w_1'. Ahora bien; esta velocidad depende de la velocidad relativa de entrada w, de la presión debida á la reacción y de la fuerza centrífuga.

Si se toma para V, velocidad absoluta de entrada, el valor medio

$$V = 0{,}650 \sqrt{2\,g\,H}$$

y para el ángulo de V y de v el valor de 20 grados se obtiene para determinar la velocidad w'; de salida en la sección considerada

$$w'_1 = 2{,}92\,H + v_1^2.$$

Para el filete líquido situado á la distancia r_2

del eje de rotación, se tendrá del mismo modo

$$w'_2 = 2{,}92\,H + v_2^2$$

y así sucesivamente.

Ahora bien; v_1, v_2, etc., son las velocidades circunferenciales de la turbina sobre los distintos cilindros concéntricos al eje, cuyos radios serían r_1 y r_2. Estas velocidades son conocidas porque son proporcionales á los radios, pero se ve que las velocidades de salida w'_1, w'_2 y otras son las hipotenusas de triángulos, cuyos otros dos lados son constantemente $\sqrt{2{,}92}\,H$ y las diversas velocidades v_1, v_2 en los puntos considerados. Será, pues, fácil calcular las velocidades de salida ó trazar geométricamente sus longitudes representativas en una escala determinada.

Conociendo estas velocidades habrá que componerlas en cada uno de los puntos 1, 3, 4, 5, etc., con la velocidad absoluta V y las velocidades circunferenciales correspondientes v_1, v_2, v_3, v_4. Esta velocidad V' debe ser la misma para todos los filetes líquidos á su salida del alabe, depende del rendimiento y hemos hallado antes su valor

$$V' = 0{,}886\ V\,H.$$

Para el filete colocado á la distancia r del eje, por ejemplo, se trazará en el plano vertical el triángulo de las velocidades á la salida en el punto de encuentro de la vertical 1,1 con la línea $A\,A'$, que es uno de los puntos de la proyección vertical del contorno inferior del alabe.

Este triángulo estará formado por la velocidad

v en los puntos de la turbina, colocados á la distancia r del eje de rotación, por la velocidad w relativa del filete líquido correspondiente y por la velocidad absoluta común r' á la salida.

Construyendo este triángulo del que se conocen los tres lados, se obtendrá el ángulo de inclinación de w' sobre v, es decir, la dirección del último elemento del alabe móvil ó su inclinación sobre la horizontal. La misma construcción se repite para los filetes líquidos situados á las distancias v_2, v_3, v_4, del eje.

Se desenvolverán entonces los cilindros de radio r_1, r_2, r_3, r_4 y observando en cada punto de salida el ángulo que debe formar el último elemento con la tangente horizontal en el mismo punto se determinará la curva que limita la proyección horizontal del alabe.

En seguida habrá que comprobar si la sección que se ha dejado libre para la salida, entre dos alabes consecutivos, es suficiente para dejar paso al volumen Q de agua que debe gastar la turbina.

En las turbinas mixtas, la relación $\frac{b}{r}$ de la altura de la corona directriz al radio de la corona móvil, es siempre muy grande; en efecto, en lugar de ser igual á 0,1 á lo sumo, como en las turbinas Girard, es muchas veces casi la unidad; resulta de aquí que la turbina mixta tiene dimensiones en anchura mucho menos considerables, y es, por lo tanto, de una forma más recogida y de una construcción más económica.

Hemos visto igualmente que el perímetro de salida del agua es muy grande, puesto que se extiende según un contorno curvilíneo de forma de

hélice, y resulta que la sección de salida es considerable. Esta circunstancia permite reducir su gran proporción al ángulo de salida del agua, lo que equivale á dar á los bordes superiores del alabe una dirección muy inclinada sobre el horizontal.

Estas curvaturas son muy ventajosas cuando la turbina está sumergida en el nivel inferior, porque presentan mucha menos resistencia al desplazamiento de la turbina en la masa líquida.

En las turbinas ordinarias se tiene siempre cuidado de dejar el menor juego posible entre las coronas móvil y directriz. No sucede lo mismo en las turbinas mixtas, que presentan siempre un juego considerable, que puede llegar hasta 30 milímetros, y que se utiliza para el paso de la compuerta cilíndrica que rehusa para regular el gasto.

Resulta de esta disposición que las láminas líquidas no son dirigidas por los alabes fijos hasta la entrada de los móviles, y se podría temer que esta separación anormal pudiera ser perjudicial al funcionamiento de la turbina; pero parecería por el contrario que el anillo líquido, así formado entre las dos coronas, constituye un medio que sirve para reunir las venas que se escapen de los canales directores, y en el cual vienen á perderse y á atenuarse los remolinos, á los cuales da lugar el espesor de los alabes.

49. Pivotes y compuertas. — Siendo las turbinas mixtas ventajosas, sobre todo desde el punto de vista de la sencillez de su construcción, se las monta sobre árboles que giran sobre pivotes sumergidos en el canal inferior. Este sistema de ár-

bol es, en efecto, de una construcción mucho más económica que el árbol hueco ordinario que gira sobre cojinetes de acero no sumergidos. El pivote sumergido se compone sencillamente de una seta de madera, generalmente encina, fija sobre una pieza, sobre la cual gira la viga del árbol, no exigiendo nunca engrase, puesto que el agua sirve de lubrificante. Pero el empleo de este sistema presenta el gran inconveniente de no permitir un fácil acceso para la vigilancia de un órgano tan delicado, y el pivote de madera es susceptible además de deteriorarse muy rápidamente. Exige en los dos casos un montaje muy cuidadoso y una detenida elección de la madera destinada á formar el pivote, puesto que ha de estar siempre sumergida y expuesta á la acción química de las sales contenidas en el agua.

Para evitar estos inconvenientes se han empleado también los pivotes de bolas, en los cuales el trabajo de rozamiento se reduce considerablemente con relación al desarrollado en los pivotes ordinarios.

En lo que se refiere á las compuertas aplicadas á las turbinas mixtas, consisten generalmente en un cilindro que se sube y baja en el intervalo que queda libre entre las dos coronas. Un sistema de esta clase tiene por efecto producir un estrangulamiento de las venas líquidas á la salida de la corona directriz, de tal manera, que el rendimiento disminuye de un modo notable cuando se reduce así la altura de los orificios abiertos.

Para evitar en cierta medida este inconveniente se provee á los alabes de una serie de tabiques que dividen la altura de entrada en varios com-

partimientos. No hay contracción cuando el brazo de la compuerta cilíndrica se detiene justamente enfrente de uno de estos tabiques, pero la hay cuando el borde está en una situación intermedia.

En resumen: las turbinas mixtas presentan ventajas sobre los demás sistemas, desde el punto de vista de sus dimensiones más reducidas de la mayor facilidad de instalación y del coste de establecimiento: pero el trazado de los alabes ofrece grandes dificultades de ejecución, y su sistema de compuertas y faroles es muy defectuoso, no permitiendo la utilización de saltos grandes que determinarían una exagerada velocidad de rotación del motor; se prestan mal á las variaciones del caudal, y no presentan ninguna superioridad de rendimiento á plena carga, teniendo más bien un rendimiento inferior al gasto reducido á consecuencia del sistema de compuertas usado.

50. Descripción de diversas turbinas mixtas.—*Turbina Hércules.* Este motor es uno de los tipos más conocidos de la clase de turbinas mixtas del tipo americano. La figura 40 representa el conjunto de esta máquina y permite darse cuenta de su construcción y de cómo se instala.

La máquina colocada en la cámara de agua en que termina el cauce superior, está soportada por una planchada ó una bóveda construída encima del canal inferior á la altura de la corona *T* correspondiente á la base de los alabes fijos.

En efecto, en el contorno de esta misma corona án montados los alabes directores ó fijos *I*. Los bes móviles *K* están constituídos por una parcilíndrica de la misma altura que los alabes

fijos, y se prolongan por debajo del nivel *T*, por superficies en forma de cuchara. Estos alabes son movibles, lo que facilita mucho su construcción y permite trabajarlos con todo el acabado y el pulimento deseables para reducir al mínimo el rozamiento de las venas líquidas contra las paredes de

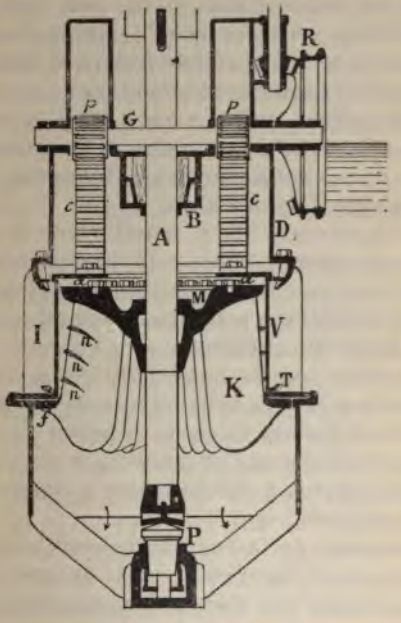


Fig. 40.—Turbina Hércules.

los alabes. Esta movilidad presenta igualmente grandes ventajas para la sustitución de los alabes en caso de avería.

Estos alabes se fijan por medio de pernos *a* so-

bre la pieza *M* llamada porta-alabes, cuyo centro está sujeto al árbol *A* de la turbina. Para asegurar la fijeza completa de los alabes sobre este soporte, cada uno de los alabes lleva en su parte superior un patín fundido que se encaja en una ranura circular practicada en el contorno de la cara inferior del núcleo. Este patín está, por decirlo así, embebido en el espesor de la fundición del porta-alabes y está apretado contra el fondo de la ranura por el perno correspondiente. Además las bridas inferiores de los alabes están unidas por coronas de acero *f* á las cuales van cosidas de tal manera, que el conjunto de los alabes móviles forma un bloque indeformable.

Entre las coronas fija y móvil viene á intercalarse la compuerta *V* que está constituída sencillamente por un cilindro que puede recibir un movimiento de ascenso y descenso por un medio mecánico. Para ello el cilindro está colgado por dos cremalleras *C* que se engranan con dos piñones *p* montados sobre un árbol *G* sostenido por dos cojinetes fundidos con la parte superior de la construcción. Este sistema se mueve por medio de dos ruedas angulares *R* colocadas en el extremo de la derecha del árbol *G*.

La campana de la compuerta está provista de talones *T* que forman en la parte inferior una corona de dientes que vienen á encajarse entre los alabes fijos y que tienen por efecto guiar las venas líquidas antes de su entrada en la corona móvil, á fin de evitar la contracción que se produciría sobre los bordes relativamente delgados de la campana.

En la figura se ven tres nervios *n* fundidos sobre

cada uno de los alabes: estos nervios constituyen especies de tabiques que tienen por efecto dividir la altura de entrada del alabe en varios pisos correspondientes á las diversas posiciones que se puede dar á la compuerta. Si se supone, por ejemplo, que la compuerta esté levantada exactamente á la altura del tabique medio, este tabique hará el mismo papel que la superficie inferior del medio, cuando la compuerta esté completamente abierta, es decir, que la vena líquida estará guiada en la parte superior por la superficie curva del nervio y así se evitarán las contracciones de la vena líquida que tienden á reducir el rendimiento cuando la compuerta no está enteramente levantada.

Se comprende que para que ésta disposición pueda utilizarse, es necesario detener el borde de la campana en el nivel de los tabiques, porque entre dos nervios las contracciones se producen sin ninguna atenuación. Este es el inconveniente de estas compuertas que son sencillas pero siempre defectuosas desde este punto de vista.

Turbina Brault. — Bajo los mismos principios que la turbina Hércules se han construído un gran número de turbinas que no difieren de ella más que en disposiciones de detalle y de construcción. En la turbina Brault, por ejemplo, los alabes de la corona móvil, en vez de ser movibles, están fundidos en una sola pieza, siendo esta construcción evidentemente más económica que la anterior, pero no se presta tan fácilmente á un trabajo perfeccionado.

Turbina Laurent. — Laurent y Collet han ideado una disposición diferente para la compuerta

cilíndrica que regula el gasto; en lugar de intercalarla entre las coronas móvil y fija, la colocan en el exterior de la corona directriz, y esta disposición permite suprimir la cuba *D*, que ya no es necesaria, puesto que la campana de la compuerta, al abrazar las dos coronas, hace que éstas queden recubiertas por un techo común, que forma junta hermética con el cilindro de la compuerta. La altura total del motor se reduce mucho, y la construcción queda por lo tanto simplificada. Además, la posición de la compuerta en el exterior del distribuidor hace que ya no sea necesario dejar un juego tan grande entre las dos coronas. Sin embargo, esta ventaja es de poca importancia porque el espacio necesario para el paso de la compuerta entre las dos coronas no parece que presenta ningún inconveniente desde el punto de vista del movimiento de los filetes líquidos en el interior de la turbina.

Turbina Vigreux.— La casa Darblay construye una turbina ideada por Carlos Vigreux, en la cual el sistema de compuerta utilizado se establece siguiendo un principio completamente distinto de los anteriores. Hemos visto, en efecto, que el sistema de compuerta de campana cilíndrica no permite conservar el rendimiento máximo en los diversos gastos de agua, de suerte que la utilización de la caída es tanto menor cuanto menor sea la carga á que trabaje la turbina. Esto obedece á que la compuerta cilíndrica actúa sobre todos los alabes directores á la vez, reduciendo al mismo tiempo la sección de salida de cada uno de ellos, y de aquí resultan contracciones y remolinos que hacen bajar el rendimiento.

Se comprende que se evitaran estos inconvenientes si, en lugar de cerrar parcialmente todos los alabes, se coloca una compuerta que permita cerrar sucesivamente, pero por completo, un número mayor ó menor de ellos, según las variaciones del gasto. En estas condiciones se llegará á hacer variar el gasto en las proporciones que se quiera sin perjudicar el rendimiento, puesto que los alabes que queden abiertos funcionarán á pleno consumo por su sección completa.

Para conseguir esto, se forma la corona directriz de igual número de alabes fijos que constituyen el distribuidor propiamente dicho, y de otros móviles que se intercalan entre los precedentes de manera de obstruir como una puerta toda la altura de los alabes fijos. Para esto, las válvulas móviles están montadas sobre ejes verticales colocados sobre la periferia de la corona directriz.

Cada una de ellas lleva una palanquita horizontal cuyo extremo encaja en una ranura circular practicada en la llanta de un volante dispuesto de tal manera, que puede girar alrededor del árbol vertical.

Este volante tiene en realidad dos ranuras, una sobre la cara superior y la otra sobre la inferior, y los extremos de las palancas de las válvulas situados sobre cada una de las mitades de la circunferencia están repartidos entre estas dos ranuras, cada una de las cuales está formada por dos semicircunferencias de diámetro diferentes de tal manera, que siguiendo la rotación del volante las palancas que mueven las válvulas, están dirigidas radialmente ó tangencialmente, lo que corresponde á cerrar ó abrir las válvulas.

Como, por otra parte, las semiranuras están colocadas en sentido inverso sobre las dos caras del volante, resulta que los alabes directores se cierran siempre por parejas situadas en los extremos de un mismo diámetro, asegurándose así la igual repartición de la acción del agua sobre la turbina.

El volante regulador se mueve por medio de una rueda dentada situada sobre su cara superior, la

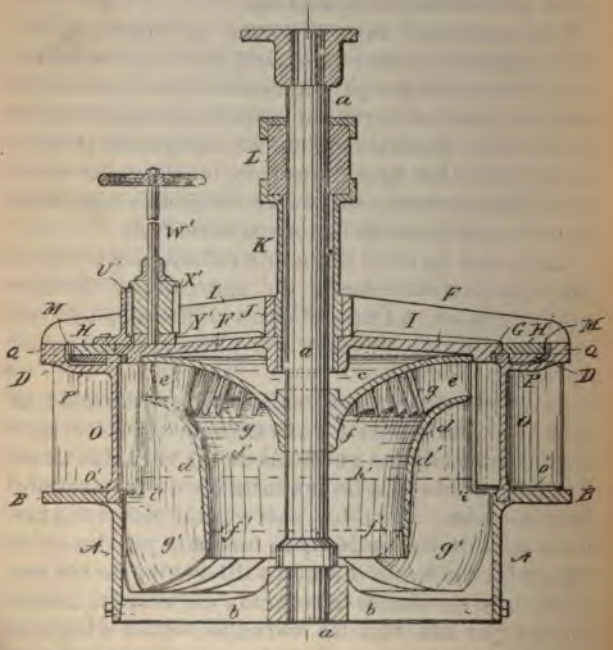


Fig. 41 *(a)*.—Turbina Bookwalter y Tyler. *(Corte vertical)*.

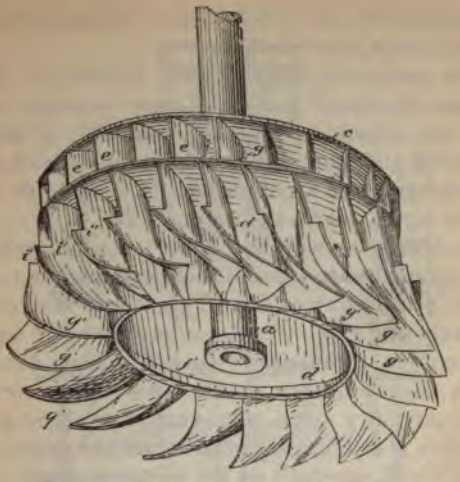


Fig. 41 (*b*).—Turbina Bookwalter y Tyler.

cual engrana con un piñón cuyo eje puede ser movido por un volante á mano.

Todo este mecanismo está dentro de una campana herméticamente cerrada, colocada encima de la turbina.

Turbina Leffel.—Una de las turbinas más extendidas en la América del Sur, es la turbina Leffel.

Su originalidad consiste en que la corona móvil está, en realidad, constituída por dos coronas superpuestas; la parte superior está dispuesta de manera de dirigir los filetes líquidos hacia el centro, y constituye, por lo tanto, una turbina centrípeta; la corona inferior lleva los alabes de doble curvatura que dirigen el agua á la salida en un sentido paralelo al eje, lo mismo que en las turbi-

nas paralelas. Es difícil darse cuenta de las ventajas de esta disposición.

Otra particularidad de esta turbina es que los alabes directores son móviles y pueden oscilar cada uno alrededor de un eje paralelo al árbol de la turbina; hacen, pues, el papel de compuerta disminuyendo ó aumentando la sección de entrada del agua, según su inclinación.

Turbina Bookwalter y Tyler.—Las figuras 41 *a* y 41 *b* representa un motor de este sistema, modificado por Bookwalter y Tyler. Las dos coronas de alabes *eg* y *g' i'*, están separadas por un tabique cónico cilíndrico *d d'*. Los alabes directores están representados en *O;* estos alabes sirven de compuertas, y para ello van sostenidos por dos platillos *B* y *F* moviéndose simultáneamente por un anillo *H,* provisto de un sector dentado *U'* que se mueve por el piñón *X* y la manivela *W'*.

Cuando las compuertas están abiertas totalmente, el rendimiento varía entre 65 y 74 por 100, pero baja al 60 por 100 para la mitad del consumo de agua.

Turbina Ridson.—La figura 42 representa en corte vertical y en planta la turbina Ridson. En este motor los alabes directores *D* son rectilíneos, y los móviles *G* son de doble curvatura.

Las compuertas están constituídas por un cilindro *V* que está suspendido por una cremallera c de un pistón *d*, el cual es concéntrico al eje y puede moverse á lo largo del árbol.

Esta compuerta está exactamente guiada por las ranuras de tres guías especiales *J*, lo cual permite reducir á lo estrictamente necesario el juego que queda libre entre el cilindro de la compuerta

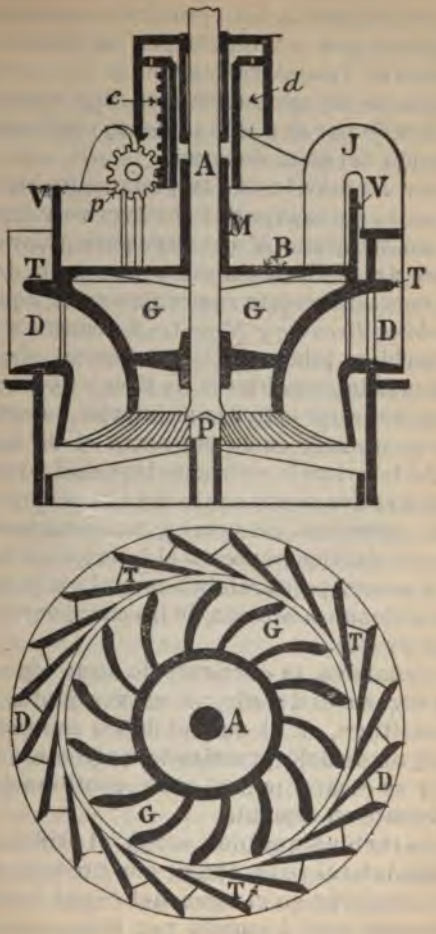


Fig. 42.—Turbina Ridson.

y la corona móvil. La cremallera que soporta la compuerta está accionada por un piñón *d* y por un juego de ruedas de engranaje.

El peso de la compuerta está casi exactamente equilibrado por el pistón *d*, debajo del cual actúa la presión del salto de agua.

La corona móvil está completamente aislada del agua en la parte superior por la envolvente *B* que lleva un manguito *M* que sirve para guiar el árbol *A*. Este árbol descansa sobre un pivote de madera *P*, constantemente sumergido en el líquido.

Turbina Brenier y Neyret.—Se construyen también turbinas mixtas de eje horizontal, siendo una de las más interesantes la de Brenier y Neyret. La corona directriz está fija al interior de una envolvente en espiral, en la que entra el de agua por un tubo inferior; la corriente líquida se distribuye así progresivamente sobre toda la periferia de los alabes directores, penetra en la corona móvil colocada concéntricamente en el interior de la corona fija, y se escapa paralelamente al eje por el orificio practicado sobre una de las caras verticales de la envolvente.

En definitiva, la corriente de agua sigue un camino inverso al del aire en un ventilador de fuerza centrífuga, en el cual el fluído aspirado penetra por un orificio practicado enfrente de las paletas y se escapa por un tubo, continuación de la envolvente en espiral.

En la turbina que nos ocupa, el orificio de evacuación lateral se prolonga por un tubo acodado que se sumerge en el agua del canal inferior. La envolvente está formada por dos piezas unidas por bridas roblonadas; los cojinetes en que se apo-

ya el árbol están fundidos con uno de los fondos de la envolvente, y además con el tubo acodado de evacuación.

El empleo de estas turbinas está muy indicado para mover dinamos de eje horizontal que pueden ser movidas directamente por el motor hidráulico por un acoplamiento elástico.

La compuerta cilíndrica es enteramente semejante á las del mismo sistema empleadas en las turbinas verticales, y se mueve por medio de un volante y de una transmisión por tornillo sin fin y ruedas helizoidales.

Turbinas acopladas.—Las turbinas mixtas son generalmente aplicadas en América á los grandes saltos. Para pequeñas caídas de gran caudal se las puede también utilizar acoplando dos turbinas sobre el mismo árbol.

Esta disposición ha sido aplicada á la turbina Leffel, antes descripta. Las dos coronas móviles montadas en los extremos de un mismo árbol están encerradas en una envolvente de palastro que es la puerta en comunicación por los dos lados con el depósito superior; después de haber atravesado las dos turbinas la corriente de agua, va á un tubo de evacuación común que sale del centro de la envolvente entre los dos motores.

Este tubo entra en el agua del canal inferior del mismo modo que en la turbina de sifón de Girad. Como todo sifón debe previamente encebarse, el tubo de evacuación lleva lateralmente otro con una compuerta que puede ponerse en comunicación con el canal superior con aquel objeto.

Las compuertas son del mismo sistema ya descripto para las turbinas verticales.

Se pueden también acoplar las turbinas colocándolas en sentido inverso sobre un árbol, es decir, de tal manera, que el agua se distribuya en cada una de ellas por el centro de la envolvente común en tanto que la evacuación se haga por los dos extremos, por medio de tubos distintos sumergidos ambos en el canal inferior. Se ve, pues, que la disposición de Jonval se aplica generalmente á las turbinas mixtas de eje horizontal, porque es particularmente ventajosa en este caso, puesto que permite establecer las turbinas al nivel de la sala de máquinas, es decir, á una cierta altura por encima del canal inferior, sin que por esto disminuya la caída utilizada.

Saltos de gran altura.—Hemos visto que las turbinas mixtas, que son muy estimadas, particularmente en América, no son en nada superiores á las demás turbinas desde el punto de vista del rendimiento. Además estas turbinas no se prestan á la utilización de grandes saltos por las exageradas velocidades que alcanzan en estas condiciones.

Por el contrario, la turbina paralela ordinaria está muy indicada para esta aplicación. Conviene entonces, como hemos visto (§ 46), no alimentar la turbina por toda la circunferencia, sino sólo por una parte de ella, y en estas condiciones el diámetro de la turbina será más grande y los orificios más anchos; la velocidad de rotación será más reducida y los pasos abiertos á la salida del agua resultarán menos susceptibles de obstruirse.

La instalación de esta turbina es muy sencilla: su entretenimiento se facilita además por la circunstancia de que la corona móvil es perfectamente accesible, pudiéndose también recomendar

el sistema en las pequeñas instalaciones de montaña que no utilizan más que un personal muy restringido y sin aptitud mecánica especial.

51. Ruedas vivas por reacción.—Hace mucho tiempo que se aplica la idea de que un chorro de agua á gran presión, dirigido sobre las paletas de una rueda motriz, la pone en movimiento por el efecto de su fuerza viva. El agua se proyecta por una busa de forma piramidal, y así funcionan una multitud de molinos.

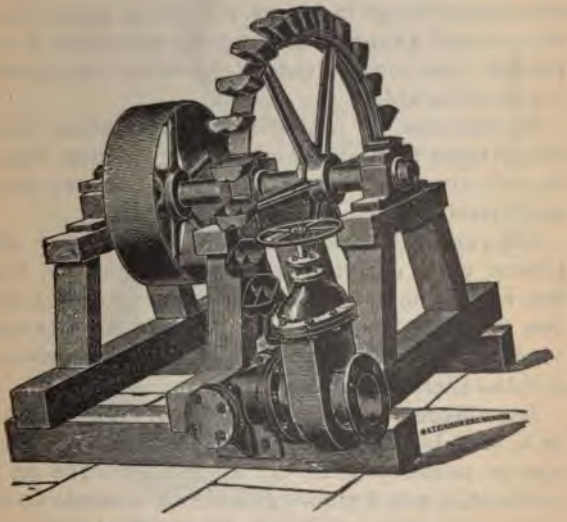


Fig. 43.—Rueda Pelton.

Las paletas de las ruedas solían tener forma de cucharas, y el agua proyectada violentamente

hacia sus extremos actuaba, por decirlo así, como el aire sobre las aspas de un molino de viento, no pudiendo obtenerse evidentemente rendimientos elevados con estos mecanismos tan elementales, y en efecto, nunca se pasaba del 33 por 100.

Un constructor americano, Pelton, ha perfeccionado este antiguo sistema sustituyendo las paletas por alabes de forma más racional, obteniendo rendimientos parecidos á los de las turbinas.

Esta rueda, que se usa mucho en América, es sobre todo ventajosa para la utilización de grandes saltos: recoge la fuerza viva de la masa líquida, que está animada de una gran velocidad y que permite, por consiguiente, desarrollar una potencia considerable.

Se compone de una polea de fundición sobre cuya llanta se fijan los alabes que tienen forma de cucharas, y en el centro de los cuales se eleva una arista viva en forma de V (fig. 43).

El agua, en forma de chorro, lanzada por una tobera, viene á dividirse sobre la arista de la V en dos venas que se desvían por la curva de los alabes, y después de haber comunicado por esta desviación toda su fuerza viva á la rueda, cae sin velocidad fuera del alabe.

Los alabes y el impulso del chorro dirigido por la tobera la transforman en trabajo mecánico; son la parte esencial del aparato, porque de la perfección más ó menos grande del trazado de los alabes, depende el valor del rendimiento que, para una rueda bien construída, puede pasar del 80 por 100

La figura 44 representa un corte del alabe Pel-

ton por un plano paralelo al eje de la rueda. Se ve que el alabe está dividido en dos compartimientos por el tabique de arista viva *C*. La forma general del corte transversal es la de un 3. El cho-

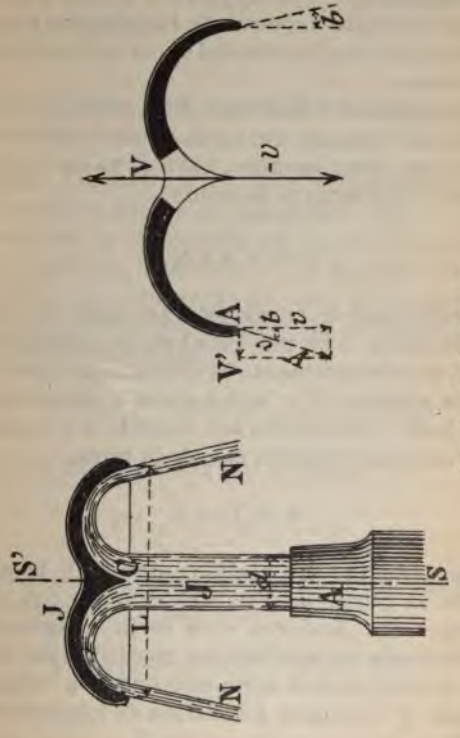


Fig. 44.—Alabe Pelton.

rro cilíndrico de agua que se escapa de la tobera *A*, viene á dividirse sobre la arista *C* en dos, que se deslizan lateralmente á derecha é izquierda

sobre las superficies curvas de los dos alabes y se escapan en dos hojas N, cuya dirección es sensiblemente paralela á la del eje SS', y el sentido del movimiento directamente opuesto al del chorro principal.

El rendimiento depende de la relación entre la velocidad de proyección del chorro y la velocidad de la rueda.

Si llamamos H á la altura de la caída que determina el movimiento del agua al surtir del tubo A, tendremos, como siempre, para el valor de la velocidad V del agua á la salida,

$$V = \sqrt{2\,g\,H}.$$

La velocidad de progresión del agua en el interior del alabe, ó en una palabra, la velocidad relativa, es evidentemente la diferencia entre la velocidad absoluta V y la del alabe v, puesto que el alabe huye, por decirlo así, delante del chorro, y esta velocidad relativa es, por lo tanto,

$$w = V - v.$$

El movimiento del alabe es debido á la absorción de la potencia viva del agua, y por consiguiente, esta potencia viva sería íntegramente transformada en movimiento mecánico de la rueda, y el rendimiento sería máximo si la velocidad absoluta V' del agua á la salida de los alabes fuera nula.

Llamemos b al ángulo de la velocidad relativa del agua á la salida, con una paralela á SS'; podremos construir en A el paralelogramo de las ve-

locidades que tenga por diagonal la velocidad relativa $V - v$, y para lados la velocidad circunferencial de la rueda v y la velocidad absoluta del agua á la salida V'.

En uno de los triángulos así formados se tiene la relación geométrica

$$V'^2 = (V - v)^2 + v^2, -2\,v\,(V - v) \times \frac{1}{\sqrt{1 + l^2}}$$

llamando i la inclinación de la velocidad relativa $V - v$ sobre la dirección paralela á $S\,S'$.

Pero como la oblicuidad del chorro es muy pequeña, como ya hemos dicho, el ángulo b es muy pequeño y poco diferente de cero; si le consideramos como tal, i se hace nulo y la relación precedente se simplifica así:

$$V'^2 = (V - v)^2 + v^2 - 2\,v\,(V - v),$$

ó también designando $(V - v)$ por w

$$V'^2 = w^2 + v^2 - 2\,v\,w.$$

Ahora bien, bajo esta forma se ve que es el cuadrado de $(w - v)$ y puede escribirse:

$$V'^2 = (w - v)^2 = [(V - v) - v]^2$$

ó

$$V' = (w - v) - v.$$

La condición de rendimiento máximo se tendrá haciendo:

$$V' = w - v - v = V - 2v = 0.$$

De donde se deduce

$$v = \frac{V}{2}.$$

Por lo tanto, vemos que el rendimiento será máximo cuando la velocidad de la rueda sea igual á la mitad de la velocidad del agua á la salida de la tubería *A*.

Es necesario tener en cuenta que los alabes fijos en la periferia de la rueda rompen el chorro de agua que sale del alabe anterior, hasta que no alcanzan la posición necesaria para presentar la cara anterior á la acción del chorro. Resulta de esto que es necesario espaciar los alabes para que no sean golpeados por el agua que sale del anterior, evitando de este modo rozamientos altamente perjudiciales.

Por otra parte, es necesario no espaciar demasiado los alabes para que el agua no pueda pasar al intervalo de dos de ellos sin que sea detenida por alguno, pues de lo contrario quedaría sin producir efecto útil durante ese momento.

La regla que, por lo tanto, debe seguirse para determinar el número de alabes, consiste en encontrar el número bajo el cual se producirían pérdidas de agua más ó menos perjudiciales.

Para que no existan pérdidas de agua, es necesario que cuando un alabe esté próximo á separarse de la acción del chorro de agua, el alabe siguiente se presente á la acción de los filetes líquidos que abandona el anterior.

Si se designa por h la distancia vertical que separa el centro de la rueda del eje del chorro, por d el diámetro de éste y por R el radio de la rueda, se demuestra geométricamente que el número de alabes está dado por la relación:

$$n = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\left(h + \frac{d}{2}\right)^2}{R^2}}}$$

en esta fórmula; $\left(h + \frac{d}{2}\right)$ representa la distancia vertical de la generatriz inferior del chorro al centro de la rueda, y haciendo

$$\left(h + \frac{d}{2}\right) = l,$$

tendremos que la relación precedente será

$$n = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{R^2}}}.$$

En el caso de que $l = R$, es decir, en el caso en que colocásemos el chorro en una posición tal que su generatriz inferior fuese tangente á la circunferencia exterior de los alabes, tendríamos

$$n = \frac{\pi}{\sqrt{1-1}} = \frac{\pi}{0}.$$

Es decir, que teóricamente el número de alabes

sería infinito, y, por lo tanto, es necesario dar siempre á l un valor inferior á R, y el número de alabes sería tanto menor para un radio dado cuanto menor sea la distancia vertical del chorro al centro de la rueda. Pero hay un límite inferior más allá del cual el chorro pasaría por el intervalo de dos alabes al interior de la rueda, lo cual sucedería si la generatriz superior del chorro de agua estuviese colocada más arriba que la tangente á la circunferencia interior de los alabes. Vemos, por lo tanto, que el chorro debe estar comprendido entre las dos circunferencias interior y exterior de la rueda.

Conviene que el agua abandone los alabes en láminas delgadas, de tal manera, que á la salida no golpee los alabes siguientes.

Vemos por todo lo dicho que la rueda Pelton conviene especialmente á pequeños gastos y grandes caídas. La velocidad que depende de h es siempre muy grande; para motores pequeños puede llegar á 5.000 vueltas en caídas de 300 metros; para los motores de 500 HP se llega á 400 vueltas; es, por lo tanto, necesario que estas ruedas estén montadas con gran cuidado y su equilibrio sea perfecto, á fin de evitar los choques y las vibraciones tan perjudiciales al buen rendimiento como á la conservación de la máquina.

Con estas ruedas pueden también utilizarse para gastos más considerables, empleando disposiciones especiales para dividir el chorro de agua. En este caso, la tubería del agua á presión se termina en varias tuberías de diámetro más pequeño repartidas en la parte inferior de la rueda, formando un arco concéntrico á la circunferencia infe-

rior; el primer chorro está dirigido horizontalmente y los chorros sucesivos van elevándose progresivamente y aproximándose á la vertical.

La rueda se encuentra en este caso alimentada sobre una parte más ó menos grande de su circunferencia y varios alabes son golpeados al mismo tiempo por los múltiples chorros.

Estos chorros múltiples, presentan la ventaja de permitir una sencilla regulación del gasto, pues basta con suprimir ó añadir una de estas tuberías. Cada una de las tuberías, funcionando, están siempre abiertas por completo; el chorro no sufre deformación alguna y el rendimiento no varía.

En el caso de una sola tubería, para variar el gasto, es necesario tapar más ó menos el orificio de salida, valiéndose de un obturador cónico que se aproxima ó se aleja de la pared interior de la tubería formada por un cono concéntrico al del obturador. En estas condiciones es difícil conservar el chorro en su forma regular, y llega más ó menos dividido al alabe con perjuicio del rendimiento.

En las máquinas bien construídas, este rendimiento es muy elevado y comparable al de las mejores turbinas. La rueda Pelton presenta además la ventaja de desarrollar una gran potencia con dimensiones muy reducidas.

Una rueda de 610 milímetros puede desarrollar una potencia de 125 HP á la velocidad de 1.000 vueltas bajo una caída de agua de 200 metros. Por la velocidad considerable de estos motores, se les emplea generalmente para la utilización de saltos muy elevados.

52. Ariete hidráulico.—Las ruedas hidráulicas y

las turbinas constituyen máquinas receptoras que aprovechan la energía de un salto de agua transformándola en trabajo industrial. Se puede también producir un resultado útil sin recurrir á estos motores, utilizando simplemente la fuerza viva del agua para elevar una parte del líquido en movimiento á un nivel superior.

El ariete hidráulico, debido á Montgolfier, es uno de estos aparatos, el cual se compone de un

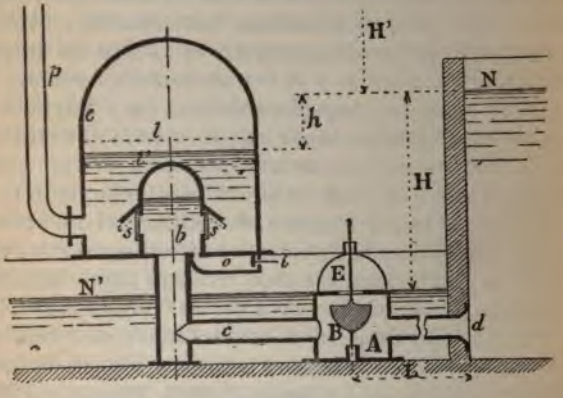


Fig. 45.—Ariete hidráulico.

tubo *c d* (fig. 45), que comunica por un lado con un recipiente lleno de agua al nivel *N*, y de otro con una campana *b* contenida en el recipiente *e*. De este último recipiente *e* parte el tubo *p* de impulsión que termina en el depósito inferior, al cual el agua quiere elevarse.

En el tubo *c d* se encuentra la caja *A* provista de un orificio *E* que puede ser alternativamente cerrado y abierto por el juego de la válvula *B*.

Entre el recipiente de nivel N y la caja A, se encuentra intercalada una llave, que no está indicada en el dibujo, que sirve para poner en marcha el aparato ó interrumpir su funcionamiento.

La campana b está provista de dos aberturas laterales que se cierran con las válvulas s.

Veamos ahora cómo funciona este aparato.

En un principio la válvula B está en la parte más baja de su carrera, en virtud de su propio peso; al abrir la llave de marcha del aparato, una corriente de agua se establece del recipiente N hacia la caja A á través del tubo $c\,d$. Esta agua pasa por el orificio E al canal N', y como la masa en movimiento parte del reposo, su velocidad va acelerándose hasta alcanzar el valor correspondiente á la altura H de caída.

Entonces, como ya hemos visto con anterioridad la resultante de las presiones ejercidas por el agua en movimiento sobre una placa interpuesta en una corriente, tiene por expresión:

$$R = d \times A \times \frac{V^2}{2g} \times K,$$

y nosotros podemos aplicar esta relación al caso actual de la válvula B, designando por A el área de la superficie, por d el peso específico del agua y por K un coeficiente que depende del índice de contracción y de la sección horizontal de la corriente en la caja A, es decir, del área del fondo mismo de la caja.

Como por otra parte esta resultante está dirigida en el sentido de la corriente, es decir, de abajo á arriba, se deduce que para una velocidad suficien-

te de *V*, esta acción llegará á ser superior al peso de la válvula *B* y comenzará á subir y se aplicará sobre el orificio *E* tapándole.

En este momento la corriente de agua cesará bruscamente, pero en virtud de la fuerza viva que la masa en movimiento está animada, chocará contra las paredes de la campana *b* y determinará un golpe de ariete que abrirá las válvulas *s*. Una parte de agua que había llegado á la campana *b*, entrará en el receptáculo *e*.

Al mismo tiempo, el aire confinado tanto en el receptáculo *e*, como en la campana *b*, se comprimirá.

Cuando la fuerza viva del golpe de ariete se agote, las válvulas *s* se cerrarán y el aire de la cámara *b* se expansionará determinando una oscilación de la masa líquida en sentido de *b* hacia *A*. La depresión resultante de esta expansión hará penetrar en la campana *b* un cierto volumen de aire atmosférico por la válvula *i* y el orificio *O*. La válvula *B* descenderá por efecto de la misma oscilación, y descubriéndose el orificio *E*, se determinará una nueva salida de agua y el ciclo de operaciones se renovará de una manera idéntica.

Veamos, pues, cuál es el papel del aire en la campana y en el receptor. En la primera sirve para amortiguar los choques de los golpes de ariete; en la segunda determina un movimiento regular y continuo del agua en el tubo ascensional *p*.

En efecto, la masa de agua se acumula primeramente en el receptáculo á la salida de la campana y el nivel subirá de *e'* á *l*, el aire se comprime primeramente á una presión inferior á la de la columna *p*, después se expansiona y expele el agua por el tubo *p*.

Designando por D el diámetro de la superficie exterior de la válvula, por D' el del orificio E, por e la distancia que puede recorrer la válvula B en su carrera, y por l el espesor de la vena líquida entre el borde exterior de la válvula y el borde interior del orificio, podremos asimilar el movimiento del agua producida por ascenso ó descenso de la válvula, al que se produce en un tubo de diámetro e y de longitud l, y sabemos que l se determina por la relación

$$l = \frac{D - D'}{2}.$$

Además, sabemos que en un tubo cilíndrico la vena líquida se contrae y da lugar á una pérdida de carga igual al tercio de la carga H. La carga efectiva que engendra la velocidad de la vena líquida, queda reducida á $\frac{2H}{3}$ y tendremos para valor de la velocidad del agua á la salida

$$V = \sqrt{2g \times \frac{2H}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3gH}.$$

Podemos también asimilar la válvula de ariete á una placa interpuesta en una corriente cilíndrica, como ya hemos dicho anteriormente.

La presión efectiva R que tiende á hacer subir la válvula, es proporcional á V, y la válvula podrá cerrarse cuando esta velocidad sea tal que se tenga

$$R = d \times A \times \frac{V_1^2}{2g} \times K = P$$

designando por P el peso de la válvula.

De donde sacamos

$$V_1 = \sqrt{\frac{2gP}{dAK}}.$$

A partir de este instante, como R va aumentando, llegará un momento en que será mayor que P, y entonces la válvula se cerrará con una velocidad que dependerá de la fuerza aceleratriz $(R - P)$. Bajo la acción de esta fuerza, la velocidad crece desde cero á un máximo V_2, obtenido en el momento en que la válvula se aplica contra su asiento; siendo $\frac{V_2}{2}$ la velocidad media, tendremos la relación

$$e = \frac{V_2}{2} \times t$$

de donde

$$t = \frac{2e}{V_2}.$$

Pero como entre la fuerza aceleratriz y la masa arrastrada existe la relación

$$(R - P) = mg = m\frac{V_2}{t} = \frac{P}{g} \times \frac{V_2}{t}$$

podremos escribir

$$V_2 = \frac{(R - P)g \times t}{P} = \frac{2e}{t};$$

y tendremos, por último,

$$t = \sqrt{\frac{2Pe}{g(R - P)}}.$$

Sea s la sección de tubo $c\,d$ del ariete y S la sección horizontal de la caja de válvula. Tendremos, entre la velocidad V del agua en la caja A y la velocidad V' del agua en el tubo, la relación

$$\frac{V'}{V} = \frac{S}{s}$$

de donde

$$V' = V \times \frac{S}{s}.$$

Si designamos por L la longitud del tubo $c\,d$, la masa de agua contenida en el tubo será igual al peso dividido por la aceleración g de la gravedad; tendremos, por lo tanto,

$$m = \frac{d \times s \times L}{g}.$$

Además, esta masa que parte del reposo adquiere la velocidad V' en el momento del cierre de la válvula. Esta masa se pone en movimiento por la fuerza aceleratriz debida á la altura de caída H, es decir,

$$F = d \times s \times H.$$

Resulta, por lo tanto, que bajo esta impulsión, la masa de agua considerada tomará una aceleración que, según las leyes de la mecánica, está dada por la relación

$$F = m\,j$$

de donde

$$j = \frac{F}{m} = \frac{d.\,s.\,H.\,g}{d.\,s.\,L} = g \times \frac{H}{L}.$$

Como por otra parte, la velocidad en el movimiento uniformemente acelerado debibo á una fuerza constante, es igual al producto de la aceleración por el tiempo durante el cual esta aceleración se produce, tendremos

$$V' = j t'$$

de donde

$$t' = \frac{V'}{j} = \frac{L.\,V'}{g.\,H}.$$

El tiempo t' es el que transcurre desde el instante en que la válvula se abre hasta el instante del cierre, puesto que desde el primer momento la masa de agua entra en movimiento y desde el segundo la masa de agua llega al reposo. Nosotros hemos ya considerado el valor de t que corresponde al tiempo que la válvula tarda en cerrarse. En fin, $(t' - t)$ representará el intervalo durante el cual la válvula queda completamente abierta.

Estas consideraciones permiten calcular el volumen de agua gastado durante el tiempo t', observando que este tiempo se divide en dos períodos $(t' - t)$ y t.

Durante el primer período, el valor medio de la velocidad del agua en la cámara A es

$$\frac{O + V_1}{2} = \frac{V_1}{2}$$

durante el segundo la velocidad pasa de V_1 V_2 y su valor medio será

$$\frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Designemos por Q' y Q'' los volúmenes de agua

gastados durante cada uno de estos períodos, y tendremos

$$Q' = \frac{S.\ V_1 \times (t' - t)}{2} = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{2\,g.\,P}{d.\,A.\,K}}\,(t' - t)$$

y

$$Q'' = \frac{S}{2}\,(V_1 + V_2)\,t.$$

Pero, según lo establecido anteriormente,

$$\frac{V_2\,t}{2} = e.$$

Por lo tanto tendremos

$$Q'' = S \times \left(\frac{t}{2} \times \sqrt{\frac{2\,g.\,P}{d.\,A.\,K}} + e\right).$$

El volumen de agua gastado durante el tiempo total t' es, pues,

$$Q = Q' + Q'' = S \times \left(\frac{t'}{2} \times \sqrt{\frac{2\,g.\,P}{d.\,A.\,K}} + e\right).$$

El tiempo t' es el que corresponde á la velocidad máxima V'; ésta depende únicamente de la altura de caída, si despreciamos los rozamientos

$$V' = \sqrt{2\,g\,H}$$

de donde

$$t' = \frac{L}{g.\,H}\,V' = L \times \sqrt{\frac{2}{g.H}}.$$

Resulta finalmente para el valor de Q

$$Q = S \times (L \times \sqrt{\frac{P}{H.\,d.\,A.\,K}} + e).$$

Esta masa de agua está animada de una potencia viva que se utiliza en hacer entrar un cierto volumen q de agua en el recipiente E. Además el trabajo del movimiento de un fluído es igual á su volumen multiplicado por la presión que soporta ó que debe vencer. Esta última está representada por una columna de agua $(H' + h)$ á la cual es preciso añadir la pérdida de carga z resultante del frotamiento en el conducto ascensional. El trabajo útil producido en cada golpe de ariete será, por lo tanto,

$$T u = d. q \times (H + h + z).$$

Este trabajo debe ser igual, si despreciamos las pérdidas, á la potencia viva de la masa en movimiento, y ésta tiene por valor el producto de esta masa por la mitad del cuadrado de la velocidad: tendremos, por lo tanto, designando por D el diámetro del tubo $c\ d$

$$T u = d \times q \times (H + h + z) = \frac{d. \pi. D^2. L}{4} \times \frac{V'^2}{2g}$$

de donde se deduce

$$d \times q \times (H + h + z) = \frac{d. \pi\ D^2 \times L}{8\ g}$$

y por último

$$q = \frac{\pi. D^2. L. V'^2}{8\ g \times (H' + h + z)}.$$

Por esta relación vemos que el volumen de agua elevada por golpe de ariete es proporcional al volumen del cuerpo del ariete, al cuadrado de la velocidad máxima del agua y en razón inversa de la altura ascensional por encima del recipiente C.

El trabajo motor gastado es igual al producto

del volumen total en movimiento por la presión debida á la altura del salto H, es decir,

$$T\,m = d.\ Q.\ H.$$

El rendimiento se obtiene de la relación $\frac{Tu}{Tm}$.

Por la expresión que obtenemos para el rendimiento, vemos que es proporcional al cuadrado del diámetro del tubo $c\,d$ y á la velocidad máxima V; decrece si la sección de la cámara A aumenta, así como el peso P de la válvula y su carrera c; crece, por el contrario, con la superficie de la válvula.

El rendimiento de un ariete bien establecido es de 65 por 100 por término medio. El número de golpes de ariete por minuto está dado por la relación

$$n = \frac{60''}{t' + t''}$$

designando por t'' el tiempo durante el cual la válvula queda cerrada, y que debe ser siempre muy corto, medio segundo aproximadamente.

El cálculo de la capacidad del recipiente c se establece, observando que este recipiente recibe por segundo un volumen $\frac{q}{t'}$, mientras que el volumen gastado por la columna ascensional p durante el mismo tiempo es solamente $\frac{q}{t'' + t'}$; el excedente almacenado durante el tiempo t'' será, por lo tanto,

$$q' = \left(\frac{q}{t''} - \frac{q}{t' + t''}\right) \times t'' = \frac{q\,t'}{t' + t''}.$$

Resulta que la altura de agua en el recipiente oscila entre los niveles l y l'. El aire en el contenido se comprime y luego se expansiona. Imponiendo la condición de que la diferencia entre estos valores extremos de la presión del aire sea una fracción $\frac{1}{N}$ de un valor medio, comprendido entre $\frac{1}{50}$ y $\frac{1}{100}$, se establece la relación que da la capacidad siguiente:

$$C = \frac{\pi . D^2 . L}{4} \times \frac{2 H \times N}{3 (1 + m) \times (H' + h + z)}$$

lo que demuestra que el recipiente regulador debe ser proporcional al volumen $\pi D^2 L$ del cuerpo de ariete, á la altura del salto H y en razón inversa á la altura á que deba elevarse el agua.

Aunque el ariete no forme parte de los motores industriales, hemos creído interesante hacer un estudio de él, porque es un aparato muy conveniente para las instalaciones de casas de campo y castillos que dispongan de un río ó de un simple arroyuelo; por una instalación sencillísima y muy económica permite elevar el agua á la altura necesaria para distribuirla en los locales convenientes. Sería de desear, á nuestro parecer, que esta disposición, capaz de dar excelentes resultados, se utilizase más comúnmente que hasta el presente.

CAPÍTULO V

CREACIÓN DE UN SALTO DE AGUA

53. Operaciones preliminares. — Hemos estudiado ya con toda extensión los motores hidráulicos, es decir, los aparatos destinados á aprovechar la energía del salto y á transformarla en energía mecánica. Pero las fuerzas hidráulicas, aunque designadas con el nombre de fuerzas naturales, no son utilizables tal como se presentan, y son necesarias operaciones preliminares para colocar estas fuerzas en condiciones apropiadas para su aprovechamiento.

Vamos, pues, á estudiar los saltos de agua desde el punto de vista de un aprovechamiento industrial. Esta cuestión lleva consigo la construcción de canales de llegada y de salida de la fábrica que utiliza el salto y otras obras indispensables, como ya veremos.

Supongamos que se dispone de una porción de un río, por ejemplo, sobre el cual proyectamos crear un salto con objeto de alimentar una fábrica. Decimos que disponemos solamente de una parte del río y no de todo él, por ser esto lo más general, siendo, por lo tanto, limitado el derecho que sobre el río tenemos. Por una parte no podemos establecer canales de llegada y de salida sobre propiedades vecinas, y este último canal tiene que desembocar en el río dentro de nuestra pro-

piedad; de aquí tenemos un límite aguas abajo. Por otra parte, es indispensable que el establecimiento del muro de retención no pueda ocasionar ningún remolino ni elevación del nivel del río, aguas arriba más allá de los límites superiores de la propiedad que poseemos.

El establecimiento de un salto no debe modificar, en teoría al menos, en nada el régimen de las aguas, ni perjudicar en nada á las instalaciones próximas. Para el estudio del proyecto es necesario, primeramente, dibujar á gran escala la porción del río sobre la cual tenemos nuestros derechos. Este plano topográfico llevará las líneas de nivel en las partes próximas al río, en una palabra, será un plano acotado.

Es preciso trazar en seguida el perfil á lo largo del río, según su eje, y en fin, es necesario trazar el perfil longitudinal de la superficie de la corriente para las crecidas ordinarias y para el estiaje.

Para hacer estos estudios recordaremos el principio que hemos establecido anteriormente cuando estudiábamos el movimiento de los líquidos en los canales descubiertos. Á este objeto nosotros hemos visto que cuando se trata en realidad no de un canal, sino de un curso de agua natural, la sección transversal, así como la pendiente del fondo, varía de un punto á otro del recorrido. Resulta que el movimiento del agua en el lecho del río no es uniforme y que la velocidad es diferente en las sucesivas secciones. Otra consecuencia es que la superficie del agua no es paralela al fondo del lecho, y que su nivel puede variar en el recorrido, de tal modo, que la profundidad del líquido puede aumentar ó disminuir de una sección á otra.

Una vez trazado el perfil longitudinal del río, trazaremos los perfiles transversales á distancias aproximadamente iguales, pero teniendo cuidado de elegir con preferencia estos perfiles sobre los puntos altos y bajos del perfil longitudinal.

Examinando este último perfil se verá que la pendiente del fondo del lecho es variable en los diferentes intervalos, entre dos perfiles transversales consecutivos. La diferencia de cotas de los dos perfiles, dividida por la distancia que los separa, dará la pendiente en cada intervalo. Si esta pendiente pasa de 0,004 por metro, se dice que el curso de agua es de régimen torrencial.

54. Cálculo del gasto.—La primera cuestión que es preciso resolver es el cálculo del gasto. Es necesario considerar dos gastos, que son: el gasto para el estiaje y el gasto en las crecidas ordinarias.

Es evidente que el gasto Q es el mismo para todas las secciones, pero si se calculase este gasto solamente para una sección, nos expondríamos á encontrar para Q un valor demasiado grande ó demasiado pequeño. Lo más práctico es elegir un cierto número de secciones transversales, las más características, y tomar la media de los resultados obtenidos, aplicando la fórmula del gasto á estas diversas secciones.

Aunque no hemos tratado directamente esta cuestión en ninguno de los capítulos anteriores, se deduce inmediatamente del cálculo que nosotros hemos expuesto al tratar de encontrar la diferencia de nivel de la superficie de agua en dos secciones que limitan la porción considerada de un curso de agua irregular (§ 20).

Esta diferencia de nivel está dada por la relación

$$y_3 - y_3 = \frac{Q^2}{2g} \times \left(\frac{1}{S_3^2} - \frac{1}{S_2^2} \right) + \frac{Q^2 \times b_1}{2} \times$$
$$\times \left(\frac{P_2}{S_2^3} + \frac{P_3}{S_3^3} \right) \times d.$$

En esta fórmula $y_3 - y_2$ representan la diferencia de nivel entre las dos secciones consideradas; Q el gasto, S_1 y S_2 las áreas de las secciones dadas por los perfiles transversales en los puntos correspondientes; b_1 el coeficiente de Darcy referente á la resistencia que proviene del rozamiento del agua sobre las paredes; P_2 y P_3 los perímetros mojados de las dos secciones y d la distancia entre ellas.

Como conocemos el perfil longitudinal, y por consiguiente $y_3 - y_2$, que designaremos por y para simplificar, podremos tener el valor de Q.

De la expresión precedente deducimos

$$Q^2 = \frac{y}{\frac{1}{2g} \times \left(\frac{1}{S_3^2} - \frac{1}{S_2^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{P_2}{S_2^3} + \frac{P_3}{S_3^3} \right) \times b_1 \times d.}$$

El factor $\frac{1}{2} \left(\frac{P_2}{S_2^3} + \frac{P_3}{S_3^3} \right)$ representa la media de dos cantidades referentes á dos secciones consecutivas, y si consideramos una sección S comprendida entre ellas, tendremos:

$$\frac{P}{S^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_2}{S_2^3} + \frac{P^3}{S_3^3} \right)$$

Llevando esta igualdad á la expresión principal, ésta se simplificará y podrá escribirse

$$Q^2 = \frac{y}{\frac{1}{2g}\left(\frac{1}{S_3^2} - \frac{1}{S_2^2}\right) + \frac{P}{S^3} \times b_1 \times d}.$$

Hemos establecido esta relación en la hipótesis en que las secciones S_2 y S_3 fuesen muy próximas, es decir, lo suficientemente próximas para que los perfiles transversales entre las dos secciones varíen muy poco, y que la pendiente pueda considerarse como uniforme. En la práctica tomaremos dos secciones distantes 40 ó 50 metros, es decir, que entre estas dos secciones el área S de los perfiles intermedios y su perímetro P puede tener gran variación de un punto á otro del recorrido; lo mismo sucede para los valores de b_1.

Por lo tanto, todas las cantidades que entran en el término relativo á la resistencia debida al rozamiento, están comprendidas en la expresión

$$\frac{P}{S^3} \times b_1 \times d$$

y varían constantemente en el intervalo considerado.

Admitiremos, sin embargo, que b_1 quede constante é igual á 0,0004, aunque en realidad varíe con la forma y la pendiente del cauce, porque las variaciones de este coeficiente son bastante pequeñas en la práctica, y además esta hipótesis tiene la gran ventaja de simplificar los cálculos considerablemente.

De cualquiér modo que sea no se puede calcular de una sola vez, por decirlo así, la pérdida de carga de que se trata; hay que calcularla teóricamente para cada longitud d del recorrido, suficientemente pequeña para quedar dentro de la hipótesis que ha servido de base para establecer esta relación. En una palabra, hace falta hacer la suma de todas las resistencias elementales escalonadas en el recorrido considerado.

En estas condiciones ya no hay que preocuparse de la longitud del recorrido considerado, y es preferible, para la exactitud de los resultados, calcular sucesivamente la expresión de Q, tomando primero, no los perfiles 1 y 2, sino los perfiles 1 y 3, suponiendo numerada la serie de perfiles á partir de aguas arriba, por ejemplo. De esta manera se tomará para S_2 el valor del perfil número 1; para S_3 el valor del perfil número 3, y para S los de los perfiles intermedios. No se conocen estos perfiles ni los diversos valores de $\frac{P}{S^3}$ para todos los puntos intermedios, pero se pueden calcular por fórmulas de integración, tales como la de Simpson.

Supongamos, por ejemplo, que la distancia entre los perfiles extremos considerados 1 y 3, sea 79m37 (*). Designaremos ahora la sección por índices que correspondan á su orden numérico. Calcularemos primero S_1, S_2 y S_3. Este cálculo se hará fácilmente descomponiendo en triángulos y trapecios la superficie de los perfiles transversales; calcularemos del mismo modo, después de es-

(*) Este ejemplo numérico está tomado de la obra de M. Virgreux.

tos perfiles, los perímetros mojados P_1, P_2 y P_3, y deduciremos las relaciones $\frac{P_1}{S_1}$, $\frac{P_2}{S_2}$ y $\frac{P_3}{S_3}$.

Supongamos que se hayan encontrado los resultados siguientes:

$$\frac{P_1}{S_1^{\frac{3}{2}}} = 0{,}0295 \quad » \quad \frac{P_2}{S_2^{\frac{3}{2}}} = 0{,}0464 \quad » \quad \frac{P_3}{S_3^{\frac{3}{2}}} = 0{,}0370.$$

Tendremos entonces, según la fórmula de Simpson, para la suma de todas las resistencias escalonadas sobre el recorrido de 79m,37 entre las tres secciones consideradas.

$$\text{Suma de cantidades } \frac{P}{S^{\frac{3}{2}}} \times b_1 \times d = \frac{79{,}37 \times 0{,}0004}{3 \times 2} \times$$

$$(0{,}0295 + 0{,}0370 + 4 \times 0{,}0464) = 0{,}001334.$$

Se efectuarán en seguida los mismos cálculos para los intervalos de 2 á 4, de 3 á 5, y así sucesivamente, hasta el último perfil, y después de haber trazado el cuadro de estos diversos valores para el estiaje, se formará otro para las crecidas ordinarias, calculando las superficies y perímetros mojados de los perfiles para este segundo caso.

La expresión de Q obliga también á calcular las cantidades

$$\frac{1}{2g} \times \left(\frac{1}{S_5^2} - \frac{1}{S_1^2} \right).$$

Encontraremos en el caso del estiaje, y para el

primer recorrido entre los perfiles 1 y 3, el valor siguiente:

$$\frac{1}{2g} \times \left(\frac{1}{S_3^2} - \frac{1}{S_1^2} \right) = 0{,}000096$$

y se puede calcular ya el valor correspondiente de Q.

La expresión de Q contiene la cantidad y que es la diferencia de los niveles del agua en los perfiles 1 y 4, ó sea $y = 0{,}415$.

Se tendrá, por lo tanto,

$$Q^2 = \frac{0{,}415}{0{,}000096 + 0{,}001334} = \frac{0{,}415}{0{,}00143}$$

de donde se obtiene finalmente para el estiaje

$$Q = 17{,}30 \text{ m}^3.$$

Procediendo del mismo modo para los demás intervalos, se encontrarán otros valores de Q que diferirán generalmente entre sí de una manera muy notable, y el gasto debe ser evidentemente el mismo en todas las secciones. Pero estas anomalías se explican por los posibles errores cometidos en las nivelaciones y en el levantamiento de perfiles transversales, y también por las variaciones del gasto de la corriente de agua y los cambios que pueden ocurrir en la forma y en la sección del cauce durante el espacio de tiempo, bastante largo, que se necesita para el levantamiento del perfil longitudinal y de los distintos perfiles transversales.

Conviene no tener en cuenta más que los resul-

tados suficientemente concordantes entre sí, y escoger especialmente los intervalos en los cuales los perfiles transversales no presenten variaciones demasiado bruscas. Se tomará entonces el promedio de algunos de los resultados obtenidos entre los que resulten más próximos.

Para la continuación de nuestro estudio tomaremos las cifras siguientes:

1.° Para el estiaje

$$Q = 18{,}800 \text{ m}^3.$$

2.° Para las crecidas ordinarias

$$Q = 38{,}200 \text{ m}^3.$$

55. Cálculo del nuevo perfil.—Dado un río ó arroyo se puede levantar el perfil longitudinal de la superficie de la corriente, tanto en las crecidas ordinarias como en el estiaje. Los perfiles transversales y el longitudinal del río, nos habrán permitido, completando estos datos, calcular aproximadamente el caudal de la corriente de agua en el estiaje y en las crecidas ordinarias.

Pero evidentemente no conocemos los nuevos perfiles longitudinales de la superficie del agua, que se establecerán después de la instalación de la presa.

Ahora bien, este perfil debe ser tal, que no se produzca ningún remolino ni sobreelevación del nivel del agua en el primer perfil, contando á partir de aguas arriba, es decir, que hace falta, en una palabra, que la cota del agua en ese perfil no varíe en absoluto después de construir la presa.

Para determinar la que será este nuevo perfil longitudinal de la superficie del agua, nos serviremos de la relación que hemos recordado antes, aplicándole primero á las dos primeras secciones de aguas arriba

$$y_2 - y_1 = \frac{Q_2}{2g}\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) + \frac{Q_2 \times b_1}{2} \times \left(\frac{P_1}{S_1^3} + \frac{P_2}{S_2^3}\right) \times d.$$

En esta relación conocemos y_1 puesto que esta cota no debe variar por hipótesis ni antes ni después de la construcción de la presa; pero es evidente que cuando se haya establecido ésta, las secciones de la corriente y los perímetros mojados serán diferentes de lo que eran antes, puesto que el perfil longitudinal de la superficie del agua se habrá modificado: esto quiere decir que no conocemos de antemano los nuevos valores de S_2 y P_2.

No se podrá, por lo tanto, resolver la ecuación anterior más que por aproximaciones sucesivas, y para ello supondremos primero y_2 igual á y_1, es decir, que la superficie del agua es horizontal entre los dos primeros perfiles, y deduciremos los valores de S_2 y P_2 que resulten de esta hipótesis.

Supongamos que la sección S_2 que era antes de 8,45 m. sea ahora de 16,85, y que el perímetro mojado haya variado de 22,03 á 28,65 m. La relación precedente se convierte en

$$y_2 - y_1 = \frac{\overline{10,8}^2}{2g} \times \left(\frac{1}{\overline{16,85}^2} - \frac{1}{\overline{9,64}^2}\right) + \frac{\overline{10,8}^2}{2} \times$$
$$0,0004 \times (0,02952 + 0,00599) \times 41,27 \text{ m.}$$

ó efectuando los cálculos

$$y_2 - y_1 = -0,0424 + 0,0341 = -0,0083 \text{ m.}$$

Obtenemos así un primer valor de $y_2 - y_1$ que nos da al mismo tiempo el de y_2, puesto que y_1 no varía por hipótesis. Según esto la sección S_2 no tendrá en realidad el valor 16,85 m. que hemos admitido en el caso de una superficie horizontal entre los dos primeros perfiles, sino que resultará igual á 16,62 m. y el perímetro mojado igual á 28,61 m.

Será, pues, necesario llevar estos nuevos valores á la relación precedente, y se obtendrá un nuevo valor de y_2, continuándose así por aproximaciones y sustituciones sucesivas hasta que los dos valores consecutivos de $y_2 - y_1$ no se diferencien entre sí más que en una cantidad despreciable.

Operando de este modo, en el caso actual, se encuentra que el valor definitivo de $y_2 - y_1$ es igual á (— 0,009). Este valor negativo indica que existe una contrapendiente de 0,009 m. entre los perfiles 1 y 2, es decir, que el nivel del agua va subiendo desde el origen al perfil 2.

Habiendo determinado así y_2 se procederá del mismo modo entre el perfil 2 y el 3, es decir, que supondremos primero y_2 igual á y_3, lo que nos permitirá calcular los nuevos valores de S_3 y P_3 correspondientes á esta hipótesis y operar, por consiguiente, para este segundo intervalo como lo hemos hecho para el primero.

Continuando del mismo modo, llegaremos á determinar las cotas de los niveles del agua en cada perfil hasta el último, y reuniendo los puntos correspondientes por una línea continua, obtendremos el trazado del perfil longitudinal del río.

Será necesario volver á hacer el mismo trabajo

para las crecidas ordinarias y así se trazará el perfil para este caso.

Es evidente que la arista de la coronación de la presa debe ser escogida teniendo en cuenta la línea del perfil longitudinal que corresponde á los niveles más bajos: si la línea del estiaje es inferior á la de las crecidas ordinarias, la coronación de la presa se detendrá en cualquier punto que se establezca en el nivel de esta línea y en las crecidas ordinarias, y en las aguas medias pasará por encima de la presa una lámina de agua cuyo espesor estará comprendido entre *o* y la diferencia de las dos curvas de nivel en el punto donde la presa esté construída.

56. Emplazamiento de la presa.—La elección del emplazamiento de la presa depende mucho de la naturaleza de los perfiles y de la forma del perfil longitudinal del lecho del río. Es evidente que si existiese en un punto un desnivel repentino que diera lugar á una caída brusca en esta región, convendría establecer allí la presa, á menos que otras consideraciones hicieran elegir otro sitio.

Desde el punto de vista de la economía en la construcción de la obra se escogerán de preferencia los vértices de las contrapendientes que correspondan á secciones en que se estreche el cauce del río.

Hay que tener también en cuenta si es preferible colocar la presa en la parte más alta de la concesión ó en la más baja; en el primer caso su altura será pequeña, pero habrá que construir un canal largo y, por lo tanto, costoso; si se coloca, por el contrario, al final, se economiza el canal,

pero la presa será más alta, y según la configuración del terreno se sumergirán las orillas en una mayor ó menor extensión.

Es, por lo tanto, necesario tratar de conciliar estas diversas exigencias, es decir, escoger el emplazamiento de la presa de manera de reducir la importancia y el costo de la obra todo lo posible, reduciendo también las longitudes del *canal de llegada* y del *de escape*.

Se pueden igualmente emplear dos disposiciones, sea tomando para origen del canal superior el emplazamiento de la presa, ó bien no ocupándose de este emplazamiento para determinar la toma de agua del canal superior.

En el segundo caso no se tendrá más que comparar el coste de la obra, suponiéndola construída de los distintos perfiles, y se escogerá el caso más económico, siempre que no produzca una sumersión inadmisible de las orillas.

En el primer caso será necesario tener además presente el coste de los dos canales, el superior y el de escape.

En lo que se refiere á este último es evidente que deberá desembocar lo más lejos posible, es decir, en el último perfil de la concesión, si se quiere utilizar completamente el salto.

Supondremos que la presa debe construirse en uno de los perfiles más inferiores, y que su coronación tenga una cota de 8,818 m., nivel del embalse en el estiaje en este perfil. Como se supone que el nivel correspondiente á las crecidas ordinarias es de 9,327, en estas ocasiones pasará por encima de la presa una lámina de agua de 0,509 metros.

Como á continuación de la presa hay que disponer el emplazamiento de las compuertas de descarga, no se le da á aquélla la longitud total de la sección en el nivel del plano horizontal de la corona, sino solamente la longitud de la línea de agua durante las crecidas ordinarias antes de la construcción de la presa. Esta longitud, en el ejemplo escogido, es de 14,80 m.

Esta obra está, por otra parte, unida á las orillas del canal superior, que nace á la derecha de la presa, por la línea de compuertas de descarga. Las orillas del canal se establecen á 0,50 del nivel de las crecidas ordinarias.

57. Construcción de la presa.—Ocupémonos ahora de la construcción de la presa. Su emplazamiento ha sido ya escogido, y hemos visto que su coronación tenía una cota de 8,818 m.

La cota del cauce del río en el perfil en que ha de construirse la presa es de 6,641 m. La obra se construye sobre un macizo de hormigón, colocado á 0,20 m. por debajo del cauce (fig. 46). La altura de la presa por encima del cauce será, por tanto, igual á

$$h = 8^{m},818 - 6,641 + 0,200 = 2^{m},377.$$

Hay que considerar la presión que se ejerce sobre la cara anterior de la presa para el caso de las crecidas ordinarias; la coronación de la presa está entonces recubierta de una lámina de agua de 0,509 m., de tal suerte, que la altura de la columna de agua que pasa sobre la presa vendrá aumentada en esta cantidad.

Esta presión F tiene por valor, por metro de presa:

$$F = 1.000 \times 2,177 \times \left(\frac{2,177}{2} + 0,509 \right) = 3.700 \text{ kilogs.}$$

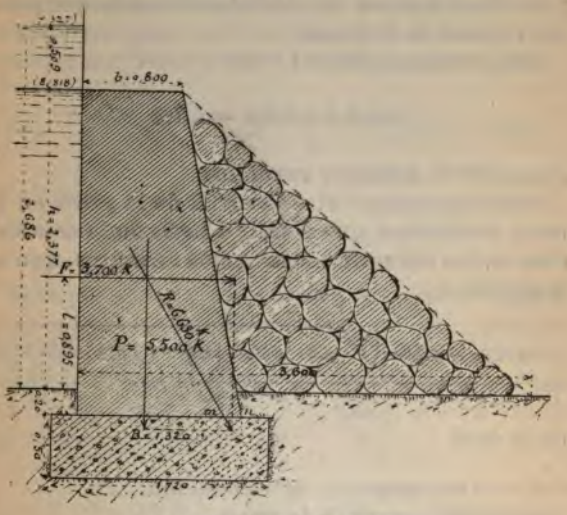


Fig. 46.—Muro de la presa.

El punto de aplicación de esta fuerza se encuentra al tercio de la altura del agua por encima del cauce, ó sea á

$$l = \frac{2,177 + 0,509}{3} = 0^{m},895.$$

El espesor b de la coronación de la presa se determina por la consideración de las condiciones

que debe llenar un vertedero de pared gruesa para que se pueda aplicar el coeficiente de la fórmula del gasto relativo á un vertedero de esta clase. Estas condiciones se realizan cuando el espesor de la coronación es por lo menos igual á vez y media el espesor de la lámina de agua que pasa por encima de la presa.

Escogeremos, pues, el valor

$$b = 1{,}5 \times 0{,}509 = 0{,}763$$

ó sea 0,80 en números redondos.

Para determinar el espesor B de la presa en la base, tendremos que acudir á la fórmula establecida en las obras de construcción de muros, que es la siguiente:

$$B = \frac{-b \times (p - d.h) + \sqrt{p.b^2 \times (3p - d.h) + 6p\,F.l \times \frac{2p - d.h}{d.h}}}{2p - d.h}$$

en la cual

b = 0,80 espesor de la coronación.
h = 2,377 altura de la presa.
F = 3,700 presión normal del agua por metro de longitud de la presa.
l = 0,895 altura del punto de aplicación de esta presión por encima del cauce del río.
d = 2.300 peso del metro cúbico de mampostería.
p = 40.000 kilogramos coeficiente de resistencia de la mampostería por metro cuadrado.

Llevando estos valores numéricos á la fórmula

anterior y efectuando operaciones, se tiene que

$$B = \frac{-27.636,4 + 126.110}{74.533} = 1,32 \text{ m.}$$

Conocemos ahora todas las dimensiones de la presa y podemos calcular su peso P por metro corriente, que vendrá dado por la relación

$$P = \frac{B+b}{2} \times h \times d = \frac{1,320 + 0,800}{2} \times 2,377 \times 2,300$$

de donde

$$P = 7.500 \text{ kilogs.}$$

Este peso P es vertical mientras que el empuje F se ejerce en sentido horizontal. La resultante de estas dos fuerzas está por lo tanto dirigida según la diagonal R del rectángulo formado por las componentes F y P, y el valor de esta resultante es, por consiguiente

$$R = \sqrt{P^2 + F^2} = \sqrt{7.500^2 + 2.700^2} = 7.968 \text{ kilogs.}$$

Es conveniente comprobar si la obra calculada así corresponde á las condiciones deseables de estabilidad. Para ello se construirá en una escala determinada, como se hizo en el dibujo trazado en la figura 46, el rectángulo de las fuerzas F y P, y se encontrará entonces que la resultante R corta á la base de la presa á una distancia $m\,n$ de la arista exterior de la obra, cuya longitud medida sobre el dibujo es de 0,116 m.

Ahora bien; se sabe que el valor máximo de la presión que se ejerce sobre esta arista viene dado por la relación

$$p = \frac{2\,R}{3\,m\,n} = \frac{2 \times 6630}{3 \times 0{,}110} = 40.181 \text{ kilogs.}$$

Se ve, pues, que la presión por metro cuadrado, en la proximidad de la arista, es casi igual al coeficiente de seguridad admitido para la resistencia de la mampostería al aplastamiento. Este resultado demuestra que el espesor B, dado por el cálculo, es suficiente y puede ser aceptado.

Se ve por el dibujo que la presa ha sido construída sobre un cimiento de hormigón de medio metro de espesor enrasado á 20 centímetros por debajo del fondo del cauce del río.

Esta presa de 14,80 m. de longitud, en el ejemplo escogido está anclada sobre la orilla derecha, de tal manera, que el agua no puede encontrar paso alguno por este lado.

La cara de aguas abajo está recubierta por una escollera, formando un talud para romper la masa de agua cuya caída brusca produciría socavaciones tales, que llegarían á comprometer la estabilidad de la obra. En el caso en que la corriente pueda arrastrar troncos de árbol y piedras durante las crecidas, conviene también proteger la cara anterior de una manera análoga.

En la orilla izquierda la presa se apoya en una pilastra de 1,20 m. de espesor, cuya coronación enrasada en la cota 11,071 m. presenta una anchura de 1,80 m. Esta pilastra sirve de soporte á uno de los extremos de la pasarela que se utiliza

para la maniobra de las compuertas, y éstas están colocadas en el intervalo que queda libre entre la pila citada y un terraplén de 6,60 m. de anchura, situado entre el cauce del río y el canal de conducción del agua.

58. Gasto de las compuertas de descarga.—Hay que calcular ahora el gasto de las compuertas de descarga, que debe hacerse para el caso de las crecidas ordinarias, puesto que entonces deben dejar paso las compuertas á la misma cantidad de agua que lleve el río por segundo, menos la cantidad que se vierte por encima de la presa.

Esta viene dada por la relación

$$q = 0{,}385 \times L \times \sqrt{2\,g \times 0{,}509}$$

fórmula en la que

0,385 es el coeficiente de contracción de la lámina de agua que pasa por encima del vertedero en pared gruesa.

$L = 14{,}80$ es la longitud de la presa.

$g = 9{,}81$.

0,509 es el espesor de la lámina de agua que pasa sobre la presa. De aquí se deduce para la cantidad de agua que debe pasar por las compuertas el valor

$$Q = 38{,}200 - 0{,}385 \times \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 0{,}509}$$

ó sea

$$Q = 20{,}200 \text{ m}^3.$$

Las compuertas se instalan de tal manera, que

su umbral está al mismo nivel que el fondo del cauce, y que, por otra parte, su borde inferior alcanza el nivel de la coronación de la presa cuando están enteramente levantadas.

Para determinar la anchura D de la compuerta, observaremos que las capas superiores de la masa del agua que pasa por las compuertas, se mueven en vertedero, en tanto que se puede considerar que las capas inferiores, en una altura h' igual á la altura normal del agua, á una cierta distancia aguas abajo de la presa, se mueven por filetes horizontales como á través de un orificio retangular sumergido.

Si llamamos

h = 2,177 metros la altura total de la lámina de agua, aguas arriba de la presa.

h' = 0,940 metros la altura del agua, aguas abajo; y

$h'' = h - h'$ = 1,237 la altura de la lámina de agua que se desliza en vertedero, se tendrá la relación

$$Q = m \times D \times h' \times \sqrt{2\,g.\,h'} + m' \times D \times h'' \times \sqrt{2gh''}.$$

Se reconoce en el primer término del segundo miembro el gasto correspondiente al orificio sumergido bajo la carga h'', y en el segundo término el gasto relativo á la lámina de agua de espesor h'', moviéndose en vertedero.

m y m' son coeficientes de contracción, que tienen respectivamente por valor

$$m = 0{,}62 \quad \text{y} \quad m' = 0{,}41.$$

Simplificando la fórmula y sustituyendo las letras por valores numéricos, se obtiene sucesivamente

$$Q = D \times \sqrt{2\,g.\,h''} \times (m.\,h' + m'.\,h'')$$

de donde

$$D = \frac{Q}{(m.\,h' + m'\,h'') \times \sqrt{2\,g.\,h''}}$$

y por último

$$D = \frac{20{,}200\ \text{m}^3}{(0{,}62 \times 0{,}94 + 0{,}41 \times 1{,}237) \times \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 1{,}237}}$$

ó sea

$$D = 5{,}36\ \text{m}.$$

59. Construcción de las compuertas.—Dada la cantidad de agua que debe pasar por las compuertas de descarga en el caso de las crecidas ordinarias, hemos deducido por el cálculo la anchura total de las compuertas, ó sea 5,36 m.

Es evidente que este intervalo debe ser dividido en un cierto número de partes iguales, para dar á las compuertas las dimensiones prácticas. Si se toman cuatro compuertas, cada una deberá tener una anchura de

$$l = \frac{5{,}36}{4} = 1{,}34.$$

Además, estas compuertas deben estar dispuestas de tal manera que puedan levantarse toda

la altura de la presa, aumentada en el espesor de la lámina de agua que pasa por encima de ella en las crecidas ordinarias; esta carrera vertical tendrá, pues, por valor

$$h = 2{,}177 + 0{,}509 = 2{,}686.$$

La figura 47 muestra los detalles de construcción de la compuerta, para la cual se usa la madera, que es más barata que los demás materiales; la obra se compone de cinco pies derechos P que forman los montantes que encuadran las compuertas, los cuales van fijos por su parte inferior á una viga general Q_0 que forma el umbral de la compuerta, y por su parte superior á un par de tablones C sujetos por pernos.

Los pies derechos extremos están embebidos en la mampostería de las pilastras colocadas á cada lado de la compuerta; las piezas intermedias están sujetas por otras A y B, unidas entre sí por las L y ensambladas todas por pernos y escuadras de hierro unas con otras, y con los montantes verticales de una parte y las vigas horizontales T de otra; éstas están colocadas en el cauce del río normalmente á los pies derechos y embebidas en un macizo de hormigón de 0,50 de espesor.

La maniobra de las compuertas se efectúa por medio de un torno pequeño movido por una manivela, sobre cuyo árbol va montado un piñón que engrana con una rueda dentada fija sobre un árbol paralelo, y este último lleva un segundo piñón que engrana con la cremallera. Así se multiplica el esfuerzo ejercido por el obrero que hace la maniobra sobre la manivela, aunque se com-

piñón que se reduce otro tanto la velocidad con que se eleva la compuerta.

Como en otro torno cualquiera, el árbol de la

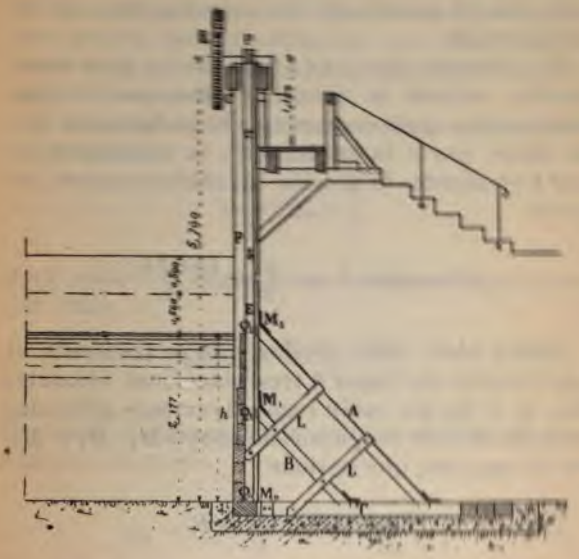


Fig. 47.—Detalle de construcción de la compuerta.

manivela lleva una rueda con una clavija y un tope para mantener la compuerta á la altura que se desee en cada caso.

La pasarela que se ve cortada transversalmente en el dibujo, corre á todo lo largo de la compuerta y se compone de dos vigas cuyos puntos extremos de apoyo están establecidos sobre pilares de mampostería, debiéndose colocar una barandilla

en toda su longitud para poder visitar los distintos tornos con absoluta seguridad.

60. Cálculos de resistencia. — Se trata ahora de calcular la sección de los pies derechos de las compuertas.

Es evidente que cada uno de los pies intermedios soporta la misma presión que el agua ejerce sobre cada compuerta. Si designamos, por lo tanto, por l la anchura de la compuerta, y por h su altura, la presión hidráulica tendrá por valor

$$P = 1000\, l \times h \times \frac{h}{2} = \frac{1000\, l\, h^2}{2}.$$

Ahora bien; cada presión que se transmite al pie derecho da lugar á tres reacciones normales Q_0, Q_1 y Q_2 que están respectivamente aplicadas en cada uno de los puntos de apoyo M_0, M_1 y M_2, de tal manera, que se tiene

$$Q_0 + Q_1 + Q_2 = P.$$

Se puede, por lo tanto, calcular la resistencia y la sección del trozo M_0, M_2 sometido á la presión del agua, considerándole como una pieza colocada sobre tres apoyos á nivel, sometida á una carga transversal, repartida según la ley de las presiones hidrostáticas.

El cálculo de la resistencia de los materiales exige el conocimiento del valor máximo del momento flector sobre la pieza considerada; se demuestra por cálculos bastante largos que, en el

caso que nos ocupa, este máximo se produce en el punto M_1, y por lo tanto conviene considerar el momento flector en este punto que llamamos m_1.

Para esto debemos tener en cuenta todas las fuerzas que actúan á la izquierda del punto M_1, por ejemplo. Estas fuerzas son, por otra parte, la reacción Q_0 del apoyo M_0 y la carga hidrostática repartida entre M_0 y M_1.

El momento de la primera fuerza es evidentemente igual á

$$m' = Q_0 \times \frac{h}{2}$$

y en cuanto al segundo se demuestra que tiene por valor

$$m'' = \frac{5.000 \times l \times h^3}{48}$$

de donde el momento flector en la sección M_1 tendrá por expresión

$$m_1 = Q_0 \times \frac{h}{2} - \frac{5.000 \times l \times h^3}{48}$$

el segundo momento parcial debe, en efecto, restarse del primero, puesto que las dos fuerzas están dirigidas en sentido contrario.

Se conocería m_2 si se conociese la reacción Q_0 del apoyo M_0; es necesario, pues, establecer otra relación que encontraremos buscando el valor del momento flector en M_2.

Este momento m_2 se compone de tres elementos: el momento m_1 en el punto M_1; el momento

$Q_1 \times \frac{h}{2}$ que proviene de la reacción Q_1 del mismo punto de apoyo, y el de la carga hidrostática repartida de M_1 á M_2. Este último tiene por valor

$$n = \frac{1000\ l \times h^3}{24}$$

de suerte que el momento m_2 estará dado por la expresión

$$m_2 = m_1 + Q_1 \times \frac{h}{2} - \frac{1000\ l \times h^3}{24}.$$

Ahora bien; m_2 no es otra cosa que la suma de los momentos de las fuerzas que actúan á la izquierda del punto M_2, y esta suma debe ser nula, puesto que las fuerzas que actúan á la derecha, y han de hacerlas equilibrio, son nulas también.

Se podrá, por lo tanto, escribir que

$$m_2 = m_1 + Q_1 \times \frac{h}{2} - \frac{1000.\ l.\ h^3}{24} = 0$$

de donde se saca

$$m_1 = \frac{1000.\ l.\ h^3}{24} - \frac{Q_1.\ h}{2}.$$

Obtenemos así un segundo valor de m_1, pero en función de una nueva incógnita Q_1. Combinando estos dos valores se encuentra la relación

$$Q_0 + Q_1 = \frac{1000.\ l.\ h_2}{24}$$

que se puede unir á la establecida antes

$$Q_0 + Q_1 + Q_2 = P.$$

Finalmente tenemos cuatro incógnitas y sólo tres ecuaciones distintas entre sí, y hace falta buscar una cuarta relación entre las reacciones de los apoyos.

Se obtiene esta última recurriendo á las fórmulas que dan en cada punto las inclinaciones de las fibras medias, y se llega así después de cálculos bastante laboriosos á establecer la relación

$$Q_0 - Q_1 = \frac{25.\, l.\, h_2}{8}.$$

Combinando esta última con las anteriores, se obtienen fácilmente los valores de las reacciones en los diferentes puntos de apoyo

$$Q_0 = \frac{7075.\, l.\, h_2}{48}$$

$$Q_1 = \frac{6925.\, l.\, h_2}{48}$$

$$Q_2 = \frac{5000.\, l.\, h_2}{24}.$$

Bastará ahora llevar los valores de Q_0 y de Q_1 á las ecuaciones en m_1 para obtener el valor de esta cantidad, que es

$$m_1 = -\frac{2925.\, l.\, h^3}{96}.$$

Conociendo el valor de m_1 se deduce la sección

del pie derecho por la fórmula general

$$m_1 = R \times \frac{I}{v}$$

en la que I es el momento de inercia de la sección con relación al eje de la viga; v la distincia de la fibra exterior á la fibra neutra, y R la carga de seguridad.

Designemos por a y b los lados de la sección que supondremos rectangular; si b es el lado situado en el plano de flexión paralelo á las fuerzas transversales, se tiene la relación

$$\frac{I}{v} = \frac{a.\,b^2}{6}$$

de donde

$$m = \frac{R.\,a.\,b^2}{6}$$

y por último

$$b = \sqrt{\frac{6\,m}{R.\,a}}.$$

Será necesario sustituir en esta relación m por su valor sacado de la fórmula anteriormente establecida, y después se escogerá un valor conveniente para a, que puede ser en el caso actual

$$a = 0{,}240 \text{ m.}$$

y

$$R = 300.000 \text{ kilogs. por m}^2.$$

Estos diversos valores, llevados á la ecuación

en b nos permitirán calcular esta segunda dimensión de la sección del pie derecho.

Tenemos ahora que calcular las dimensiones de las piezas A y B, las cuales deben resistir á los esfuerzos Q_2 y Q_1 que se ejercen en los puntos M_2 y M_1, y que tienden á producir su presión comprimiéndolas. Conviene, por lo tanto, calcular estas piezas como soportes sometidos á esfuerzos longitudinales.

Designemos por F_1 y F_2 estas fuerzas longitudinales y se tendrá evidentemente

$$F_2 = Q_2 \times \sqrt{2}$$
$$F_1 = Q_1 \times \sqrt{2}$$

si se suponen las piezas inclinadas 45 grados, porque F_1 y F_2 serán entonces las hipotenusas de triángulos, tales como el M, M_0 T cuyos lados tales como M_0 T representarán las fuerzas Q_0 y Q_1.

La fórmula que permite calcular una viga de longitud l, de sección cuadrada de lado c, sometida á una fuerza longitudinal N es

$$c = \sqrt[4]{\frac{N \times l^2}{130.000.000}}$$

pero como estas piezas están expuestas al agua y al aire, hay que reducir en una mitad el coeficiente de resistencia que se les aplique, ó lo que es lo mismo, duplicar el valor de N.

Ahora bien; en el caso actual se tiene para la pieza A

$$N_2 = 2\ Q_2\ \sqrt{2}, \qquad l_2 = h\ \sqrt{2}$$

y para la pieza B

$$N_1 = 2\,Q_1\sqrt{2}, \qquad l_1 = \frac{h}{2}\sqrt{2}$$

llevando estos valores á la fórmula en c se tiene

$$c_1 = \sqrt[4]{\frac{Q_1\sqrt{2}\times\overline{2,177}^2}{130.000.000}}$$

$$c_2 = \sqrt[4]{\frac{2\,Q_2\sqrt{2}\times 2\times\overline{2,177}^2}{130.000.000}}.$$

Para calcular estas expresiones hace falta conocer primero los valores de Q_1 y Q_2, y éstos se obtienen en seguida, haciendo los cálculos de las expresiones establecidas precedentemente, que son:

$$Q_1 = \frac{6925\times l\times h^2}{48} = \frac{6925\times 1{,}48\times\overline{2,177}^2}{24} = 1012$$

y

$$Q_2 = \frac{5000\times l\times h^2}{24} = \frac{5000\times 1{,}48\times\overline{2,177}^2}{24} = 1461.$$

Sustituyendo Q_1 y Q_2 por estos valores en las expresiones precedentes de c, haciendo operaciones y extrayendo la raíz cuarta, ó lo que es lo mismo, dos veces la raíz cuadrada, se encuentra

$$c_2 = 0{,}132 \text{ m.}$$
$$c_1 = 0{,}085 \text{ m.}$$

En la práctica se da á estas dos piezas la misma

sección, y se toma para dimensión común la mayor, es decir,

$$c = 0{,}132 \text{ m.}$$

Del mismo modo calcularemos el lado b de la sección transversal de los postes verticales. Hemos encontrado para expresión del momento flector

$$m = -\frac{2925 \times l \times h^3}{96}.$$

Distribuyendo las letras por sus valores numéricos, se tiene

$$m = -\frac{2925 \times 1{,}48 \times \overline{2{,}117^3}}{96} = -465{,}3$$

y llevando este valor á la expresión anteriormente establecida, que da b, resulta

$$b = \sqrt{\frac{6\,m}{R.\,a}} = \sqrt{\frac{b \times 465{,}3}{300.000 \times 0{,}240}} = 0{,}197$$

ó sea

$$b = 0{,}200.$$

Nos falta calcular el espesor de los maderos que forman la compuerta. Como se ve en la figura 47, las compuertas están construídas en tres pisos sucesivos de maderos, cuyos espesores van creciendo de abajo á arriba. Se tiene, pues, calculada cada una de estas partes por el esfuerzo máximo que soporta, el cual se ejerce evidentemente sobre la lámina inferior de cada una de estas secciones.

Consideremos la banda de 1 cm. de altura, situada en la base de la parte más alta, á una profundidad de $\frac{2,177}{2} = 0,726$ por debajo del nivel del agua; la presión que se ejerce por metro de longitud sobre el centro de la banda considerada, á 0,721 m. de profundidad, por consiguiente, tiene por valor

$$P = 1000 \times 0,01 \times 0,721 = 7,21 \text{ kilogs.}$$

La pieza considerada es un prisma de sección rectangular, de base $b = 0,01$ y de una altura desconocida h; puede ser considerada como una viga que se apoya sobre dos puntos á nivel, separados $l = 1,34$ m. y cargada de un peso P uniformemente repartido por metro de longitud.

En este caso el momento flector máximo se produce en el centro de la distancia l, y tiene por valor

$$m = \frac{1}{8} P \times l^2 = \frac{1}{8} \times 7,21 \text{ kilogs.} \times \overline{1,34}^2 = 1,617.$$

Emplearemos como antes la fórmula

$$m = R \times \frac{I}{v}$$

en la que se tiene que

$$\frac{I}{v} = \frac{b\,h^2}{6}$$

de donde

$$m = R \times \frac{b.\,h^2}{6}$$

y, por último,

$$h = \sqrt{\frac{6\,m}{R\,b}} = \sqrt{\frac{6 \times 1{,}617}{300.000 \times 0{,}01}} = 0{,}057.$$

Se tendrá del mismo modo para la segunda parte de la compuerta, considerando el eje de la franja inferior situada á 1,447 por debajo del nivel del agua

$$P = 1000 \times 0{,}01 \times 1{,}447 = 14{,}47 \text{ kilogs.}$$

siendo el momento máximo flector

$$m = \frac{1}{8} \times P.\, l^2 = \frac{1}{8} \times 14{,}47 \times \overline{1{,}34}^2 = 2{,}914$$

y por consiguiente

$$h = \sqrt{\frac{6\,m}{R\,b}} = \sqrt{\frac{6 \times 2{,}914}{3.000.000 \times 0{,}01}} = 0{,}076.$$

Para la tercera parte, colocada en la base de la compuerta y á una profundidad de 1,177 m., la presión sobre el eje de la banda de 1 cm. de altura, situada á 2,172 m. por debajo del nivel del agua, será

$$P = 1000 \times 0{,}01 \times 2{,}172 = 21{,}72 \text{ kilogs.}$$

Para el momento flector máximo se tendrá como antes

$$m = \frac{1}{8}.\, P.\, l^2 = \frac{1}{8} \times 21{,}72 \times \overline{21{,}34}^2 = 4{,}390$$

de donde se saca

$$h = \sqrt{\frac{6\,m}{R.b}} = \sqrt{\frac{6 \times 4{,}390}{300.000 \times 0{,}01}} = 0{,}094$$

quedando así determinados los espesores de los maderos de las tres secciones de la compuerta.

Es importante calcular también su peso para establecer el mecanismo destinado á ponerlas en movimiento. Si suponemos que las vigas son de encina, su peso específico es próximamente 920 kilos por metro cúbico, pero adoptaremos la cifra de 1.000 kilos para tener en cuenta los herrajes y la cremallera que sirve para la maniobra.

El peso de cada compuerta se calcula como sigue:

$$1000 \times 1{,}48 \times 0{,}726 \times (0{,}057 + 0{,}076 + 0{,}094) = 243{,}91 \text{ k.}$$

ó sea 250 kilos en números redondos.

Para establecer el mecanismo de la compuerta hace falta tener en cuenta que la resistencia que hay que vencer para levantar cada compuerta se compone:

1.° de su peso; 2.° de su rozamiento contra los pies derechos cuyo valor se reduce todo lo posible, revistiendo metálicamente las superficies que rozan, y 3.° del rozamiento del tren de engranajes.

La fuerza debida á la presión del agua sobre las compuertas tiene por valor

$$f \times F = 0{,}20 \times 3510 = 702 \text{ kilgs.}$$

En esta fórmula f es el coeficiente de rozamiento

de las superficies metálicas en el agua, que hemos supuesto igual á 0,20 m.; F es la presión total que se ejerce sobre cada compuerta, la cual es igual á

$$F = \frac{1000 \times l. \times h^2}{2} = 3510 \text{ kilogs.}$$

Se sigue que la fuerza R, aplicada á la cremallera, está dada por la suma

$$R = P + F = 250 + 702 = 952 \text{ kilogs.}$$

ó sea 1000 kilogramos para tener en cuenta resistencias suplementarias, debidas á los cuerpos extraños que pueden interponerse entre la compuerta y las guiaderas.

Si llamamos N al número de dientes del piñón que engrana con la cremallera, la fórmula que da el valor de la fuerza que hay que desarrollar sobre el citado piñón es la siguiente:

$$R' = R\left(1 + f \times \frac{\pi}{N}\right).$$

Suponiendo que el piñón P tenga un número de dientes igual á 10, y que el coeficiente de rozamiento f sea 0,15, se tendrá

$$R' = 1000 \times \left(1 + \frac{0{,}15 \times 3{,}14}{10}\right) = 1047 \text{ kilos.}$$

Por las fórmulas de mecánica, cuya aplicación conviene en este caso, se encuentra que el diámetro del piñón debe ser igual á 0,172 m.

Se ve que para que el esfuerzo que el obrero tiene que ejercer no sea superior á 25 kilográmetros, es necesario que el tren de engranaje sea tal que este esfuerzo resulte multiplicado por 40, es decir, que se tenga entre este esfuerzo y la resistencia que hay que vencer la relación

$$\frac{1000}{25} = 40.$$

Se encuentra entonces que la rueda dentada, montada sobre el árbol del piñón que engrana con la cremallera, debe tener un diámetro igual á 1,050 m., y el piñón montado sobre el árbol de la manivela un diámetro reducido á 0,103 m.

Para terminar con las compuertas, falta sólo calcular las piezas de su parte alta, la cual se compone de dos vigas horizontales C que comprenden á los pies derechos sobre las cuales se ejercen esfuerzos transmitidos en la maniobra de la compuerta.

El máximo del momento flector se produce en el centro de la longitud de las piezas, y como cada una de ellas no tiene que soportar más que la mitad del esfuerzo, este momento será, considerándolas como piezas empotradas por sus extremos,

$$m = \frac{1}{8} P.\, l = \frac{500 \times 1{,}34}{8} = 84.$$

Sean b y h las dimensiones de la sección de la pieza, y se tendrá

$$\frac{I}{v} = \frac{1}{6} b.\, h^2$$

y si se hace

$$b = \frac{h}{2}$$

resultará, por último, que

$$\frac{I}{v} = \frac{1}{12} \times h^3$$

de donde

$$h = \sqrt{\frac{12\ m}{R}} = \sqrt{12 \times 0{,}00028} = 0{,}150$$

y la segunda dimensión será, por lo tanto,

$$b = \frac{h}{2} = 0{,}075.$$

61. Cálculo de la altura de caída disponible.—El canal empieza en el perfil núm. 6 y termina en la casa de máquinas colocada en el perfil núm. 8; la presa se ha construído como hemos visto en el perfil núm. 1, intermedio entre los dos precedentes. La construcción de este canal se compone sobre la margen izquierda, de un muro de sostenimiento que tiene que sostener el empuje de las tierras de la orilla, y en la margen derecha de un muro de terraplén que tiene que resistir el empuje del agua.

El muro de sostenimiento de la margen izquierda se destaca del borde del río en el perfil número 6; el muro de terraplén tiene su origen á la derecha de la presa y forma uno de los puntos de apoyo de la compuerta.

El fondo del canal de conducción en esta sección está á la misma cota que el fondo del río en este perfil. Conviene, en todos los casos, que la parte alta del canal no se establezca por debajo del cauce del río, porque entonces serviría de depósito de decantación que recibiría las arenas y la grava arrastradas en las crecidas.

En el perfil núm. 7, después de la construcción de la presa, el nivel del agua se eleva á la cota 8,818 en el estiaje y á la 9,327 en las crecidas ordinarias.

La coronación del muro de la margen izquierda del canal de conducción debe llegar, por lo tanto, á este último nivel á la derecha del perfil núm. 7; pero conviene elevarla 50 cm. más para que no corra el riesgo de quedar sumergida en las crecidas ordinarias. Es evidente que el trazado de este muro deberá seguir aproximadamente la línea de nivel correspondiente al de sumersión de las crecidas ordinarias. Este muro estará, pues, construído siguiendo un trazado comprendido sobre el plano acotado entre las líneas de nivel de las cotas 9,00 y 10,00.

Adoptaremos para la pendiente del canal, á partir de la sección núm. 6, un declive de 0,0002 por metro, lo que para la longitud de 55 m., medida sobre el plano, representa una pérdida de caída de 0,011 entre el origen del canal y la casa de máquinas.

El canal de escape va de la casa de máquinas al perfil núm. 11 que forma el límite de la concesión. La construcción de este canal es análoga á la del anterior; dando al encachado del fondo una pendiente de 0,0004 por metro, la pérdida de caída

en la longitud de 120 m. que suponemos que tiene, será de 0,048.

Para calcular la altura de caída utilizable, observaremos que disponemos de la diferencia de nivel total entre los extremos de la concesión entre los perfiles 1 y 11; por consiguiente, si se utilizara toda esta diferencia, la altura de caída sería en el estiaje

$$8{,}816 - 5{,}802 = 3{,}14 \text{ m.}$$

y en las crecidas ordinarias

$$9{,}336 - 6{,}452 = 2{,}88 \text{ m.}$$

Pero se pierde la caída relativa á otra pendiente del canal de escape evaluada en 0,048. Por otra parte, como consecuencia de la construcción de la presa, la cota de la superficie del agua en el perfil núm. 7 es en el estiaje 8,818 m., mientras que no es más que de 8,816 en el perfil núm. 1; existe, pues, por esto una contrapendiente superficial entre estos dos perfiles que produce como efecto la elevación del nivel del agua 0,002 á la entrada del canal de conducción, pequeña ganancia que hay que sumar al total del salto.

Resulta de estas consideraciones que la caída utilizable en el estiaje tendrá por valor

$$H = 8{,}816 - 5{,}082 - 0{,}011 - 0{,}048 + 0{,}002 = 2{,}957 \text{ m.}$$

Siendo el gasto por segundo en el estiaje de 10,80 metros cuadrados, la potencia del salto será, en este caso,

$$P = 10{,}800 \text{ kilgs.} \times 2{,}957 = 31.935 \text{ kilogramos,}$$

ó en caballos

$$P = \frac{31{,}935}{75} = 425{,}8 \text{ caballos.}$$

En las crecidas ordinarias el salto disponible será

$$H_1 = 9{,}336 - 6{,}452 - 0{,}011 - 0{,}048 - 0{,}009 = 2{,}816 \text{ m.}$$

porque entonces no existe ya contrapendiente, sino que hay por el contrario un descenso de nivel de 0,009 entre los perfiles 1 y 7.

El salto disponible es menos, por lo tanto, en las crecidas: si se quiere conservar la misma potencia, hay que aumentar el gasto de los receptores hidráulicos que deberá ser evidentemente

$$Q = \frac{31.935 \text{ kgs.}}{2.816} = 11{,}340 \text{ m}^3.$$

Como las compuertas pueden gastar 20,20 m^3, mientras el caudal del río sea inferior á este valor, el nivel de agua no rebasará la coronación de la presa, es decir, la cota 8,818: sin embargo, el nivel del agua crecerá detrás de la presa, y si consideramos las aguas medias, admitiremos que el nivel aguas ábajo corresponde á la media entre la cota del estiaje y de las crecidas ordinarias, ó sea á la cota de 6,127 m. En estas condiciones la caída correspondiente á lo que se llaman las aguas medias, será la siguiente:

$$H_2 = 8{,}818 \text{ m.} - 6{,}127 - 0{,}011 - 0{,}048 = 2{,}632 \text{ m.}$$

Con una caída reducida así, el gasto de las tur-

binas para desarrollar la misma potencia tendrá que ser de

$$Q_2 = \frac{31.935 \text{ kgs.}}{2{,}632} = 12{,}130 \text{ m}^3.$$

El gasto es entonces máximo y hace falta calcular las secciones de los dos canales para este volumen de agua.

62. Cálculo de las secciones de los canales.—En lo que se refiere al canal de conducción nos serviremos de la fórmula antes indicada (§ 18)

$$\frac{S}{K} \times i = b_1 \times v^2$$

fórmula en la cual S es la sección transversal de la lámina de agua que se mueve, K es el perímetro mojado é i la pendiente del canal. La velocidad v está unida á la sección S y al gasto Q por la relación

$$Q = S \times v$$

de donde

$$S = \frac{Q}{v}.$$

Adoptamos en este caso los valores siguientes por metro:

$$i = 0{,}0002.$$
$$b_1 = 0{,}0004.$$
$$Q = 12{,}130 \text{ m}^3.$$
$$v = 0{,}75 \text{ m}.$$

y se deduce

$$S = \frac{Q}{v} = \frac{12{,}130}{0{,}75} = 16{,}173 \text{ m}^2.$$

Por otra parte, la profundidad del agua en el perfil núm. 7 es de 2,177 m., lo que nos permite deducir la anchura del canal

$$l = \frac{16{,}173}{2{,}177} = 7{,}43 \text{ m.}$$

pero hay que comprobar si la velocidad y la pendiente admitidas *a priori* son compatibles entre sí. Para esto, sacamos de la primera relación

$$i = b_1 \times \frac{K}{S} \times v^2$$

si llevamos al segundo miembro los valores admitidos ó calculados de las cantidades que figuran en él, tendremos

$$i = 0{,}0004 \times \frac{11{,}784}{16{,}173} \times \overline{075}^2 = 0{,}00018.$$

Se ve que bastaría una pendiente de 0,00018 por metro, para asegurar el gasto del canal á la velocidad de 0,75: la pendiente supuesta de 0,0002 es, pues, con mayor razón suficiente, y como es sensiblemente igual á la que da el cálculo derecho de i, se puede considerar que las dimensiones admitidas son convenientes y pueden aceptarse.

Ordinariamente se da al canal de escape la misma anchura que al superior y haciendo esto resul-

tarán los datos relativos á este canal

$$i = 0{,}0004.$$
$$b_1 = 0{,}0004.$$
$$Q = 12{,}130\ \text{m}^3.$$

quedando por determinar la profundidad y la velocidad media del agua. De la relación precedente se saca que

$$v^2 = \frac{S}{K} \times \frac{i}{b_1}$$

y como por otra parte

$$v = \frac{Q}{S}$$

y

$$v^2 = \frac{Q^2}{S^2}$$

se puede escribir que

$$\frac{Q^2}{S^2} = \frac{S}{K} \times \frac{i}{b_1}$$

de donde se saca

$$\frac{S^3}{K} = Q^2 \times \frac{b_1}{i}.$$

Por otra parte

$$S = l \times h = 7{,}43 \times h$$

y del mismo modo

$$K = l + 2h = = 7{,}43 + 2h$$

sustituyendo estos valores en la relación precedente

$$\frac{\overline{7,43}^2 \times h^3}{2h + 7,43} = \overline{12,130}^2 \times \frac{0,0004}{0,0004}$$

y por último, simplificando se encuentra

$$410.136\, h^3 - 294,27\, h = 1093,17;$$

para resolver esta ecuación, es decir, para obtener el valor de h se aplica al método de las aproximaciones sucesivas, despreciando primero el término sustractivo en h, lo que da

$$410.136\, h^3 = 1903,17$$

de donde

$$h = \sqrt[3]{\frac{1093,17}{410.136}} = 1,386.$$

Se lleva entonces este primer valor á la ecuación completa y solamente al término en h: se deduce un nuevo valor de h^3 y por consiguiente de h, y se opera así hasta que se obtengan dos valores consecutivos de h que no difieran entre sí más que una cantidad despreciable, llegándose por último al valor $h = 1,56$.

Se deduce el valor de la velocidad media del agua en el canal de escape, en aguas medias

$$u = \frac{12,130}{7,43 \times 1,56} = 1,046 \text{ m.}$$

y por último, si comprobamos el valor de i en-

contraremos

$$i = b \times \frac{K}{S} \times v^2 = \frac{0{,}0004 \times 10{,}55}{11{,}591} \times \overline{1{,}046}^2 = 0{,}000398.$$

Este valor es suficientemente próximo á 0,0004, cifra admitida como pendiente del canal para que se puedan conservar las dimensiones encontradas para el canal de escape.

63. Cálculo de los muros de sostenimiento.—Las secciones de los muros de sostenimiento que forman las paredes de los canales de conducción y escape, se podrían calcular por el método simplificado de Poncelet, expuesto en las obras de estabilidad y resistencia de materiales.

Se encontraría en estas condiciones que el empuje de las tierras por metro de anchura del muro de sostenimiento de 3,366 m. de altura del canal de conducción, margen izquierda, es de 3,585 kilogramos: el punto de aplicación de esta fuerza está además al tercio de la altura del paramento interior del muro, á partir de la base. Las fórmulas aplicables dan entonces para la base inferior $B = 1{,}22$ y para el espesor en la coronación $b = 0{,}80$ suponiendo un paramento interior con un talud igual á $\frac{1}{8}$.

La resultante del empuje F y del peso P del muro que es igual á 7,860 por metro de longitud, viene dada por la relación

$$R = \sqrt{P^2 + F^2 + 2\,P \times F \times \frac{1}{\sqrt{1+i^2}}}$$

designando por i la pendiente por metro del talud natural de las tierras que hay que sostener; para una inclinación de 50 grados $i = 1{,}19$.

Se deduce que

$$R = \sqrt{7860^2 + 3585^2 + 2 \times 7860 \times 3585 \times \frac{1}{\sqrt{2{,}41}}} =$$

$$= 10.503 \text{ kilogramos.}$$

Trazando el dibujo de Poncelet y midiendo sobre él la longitud d comprendida entre la arista exterior del muro y el punto en que la base es cortada por la resultante, se encuentra la cifra de 0,180 m. Por consiguiente, la fórmula fundamental relativa á la presión máxima que se produce sobre la arista exterior dará

$$p = \frac{3\,R}{2 \times d} = \frac{2 \times 10503}{3 \times 100 \times 18} = 3{,}90$$

lo cual es inferior á la presión práctica al aplastamiento que se puede admitir con toda seguridad, y el espesor de 1,22 encontrado es, por lo tanto, suficiente.

El muro del canal de conducción, aunque sostenido por las tierras, se calcula como solamente sometido á la presión del agua por el interior como si estuviera aislado por el exterior. En estas condiciones se encuentra un espesor en la base de 1,050 metros.

FIN

ÍNDICE

Páginas.

PRÓLOGO..... v

CAPÍTULO I.—LEYES FUNDAMENTALES.

1. Altura piezométrica.—Trabajo hidráulico..... 1
2. Ley de Bernouilli..... 6
3. Salida por un orificio en pared delgada..... 17
4. Orificio sumergido en pared delgada..... 22
5. Orificio prolongado por un canal descubierto..... 24
6. Diversos valores de los coeficientes de contracción.. 25
7. Salida por vertedero..... 26
8. Fórmula de Belanger. — Ensanchamiento brusco.— Pérdida de carga..... 33

CAPÍTULO II.—MOVIMIENTO DE LOS LÍQUIDOS EN LOS TUBOS DE CONDUCCIÓN.

9. Pérdida de carga por rozamiento. — Fórmulas de Prony y de Darcy..... 41
10. Cambios bruscos y sucesivos de sección.. 47
11. Cambios de dirección.—Fórmulas diversas..... 54
12. Cálculo del gasto de una tubería cilíndrica..... 58
13. Cálculo de una tubería cónica equivalente á la cilíndrica..... 68
14. Cálculo de una red de distribución..... 76
15. Distribución de una tubería alimentada por dos depósitos..... 104

Páginas.

CAPÍTULO III.—Movimiento de los líquidos en los canales descubiertos

16. Ley general del movimiento.—Fórmula de Darcy... 118
17. Aforo de canales y ríos.. 123
18. Problemas relativos á los canales descubiertos 127
19. Leyes del movimiento variado.—Resalto superficial. 132
20. Determinación del perfil longitudinal de la superficie de la corriente..... 138
21. Desniveles producidos por las presas sumergidas... 145
22. Remolinos producidos por las pilas de un puente. Fórmulas de d'Aubuisson..... 151
23. Presión ejercida por los líquidos en movimiento ... 155

CAPÍTULO IV.—Los receptores hidráulicos.

24. Potencia de un salto de agua.—Fábricas hidráulicas. 167
25. Clasificación de los motores hidráulicos 169
26. Descripción de las diversas ruedas hidráulicas 174
27. Descripción de los diferentes tipos de turbinas..... 178

Ruedas hidráulicas

28. Rueda de paletas, de admisión superior y sin compuertas..... 184
29. Ruedas de paletas, de admisión superior y con compuertas..... 193
30. Rueda de pecho con compuertas de persianas..... 198
31. Rueda lateral sin compuerta 206
32. Rueda lateral con compuerta..... 213
33. Rueda lateral Sagebieu ó rueda-sifón 221
34. Rueda de admisión inferior con paletas planas..... 226
35. Rueda de admisión inferior y paletas curvas de Poncelet..... 234
36. Ruedas flotantes con paletas planas 240

Turbinas.

37. Turbina centrífuga de Fourneyron..... ... 246
38. Hidroneumatización..... 273
39. Cálculo de una turbina centrífuga..... 275

Páginas

·bina centrípeta 281
valización 288
culo de una turbina centrípeta..... 294
·binas de eje horizontal..... 297
·bina paralela..... 305
tema de compuertas 312
·ersas disposiciones de las turbinas paralelas.... 316
·binas mixtas..... 322
zado de los alabes móviles. 329
otes y compuertas..... 334
ıcripción de diversas turbinas mixtas..... 336
edas vivas por reacción 349
ete hidráulico..... 357

PÍTULO V.—Creación de un salto de agua.

ıraciones preliminares..... 369
culo del gasto..... 371
culo del nuevo perfil..... 377
plazamiento de la presa..... 380
ıstrucción de la presa..... 382
ıto de las compuertas de descarga..... 387
ıstrucción de las compuertas..... 389
culos de resistencia..... 392
culo de la altura de caída disponible 405
culo de las secciones de los canales.... 409
culo de los muros de sostenimiento..... 413

LA HOUILLE BLANCHE

REVISTA GENERAL DE FUERZAS HIDROELÉCTRICAS

Y SUS APLICACIONES

Legislación, Transporte de energía,
Electroquímica, Electrometalurgia.

Fundada el año 1901

SE PUBLICA EL DÍA 15 DE CADA MES

REDACTOR-JEFE:

E. F. COTE, INGENIERO

Suscripción: **25** francos año.

Número suelto: **2** francos.

Suscripciones y anuncios:

Librería de A. GRATIER & J. REY, Editeurs

23, Grande-Rue, Grenoble (France).

Catálogo de obras modernas relativas á la *Houille Blanche* (Electricidad-Hidráulica-Legislación).

FRANCISCO ARANA Y LUPARDO

Grandes Almacenes de Madera de Pino del Norte de Europa y de América

CASA CENTRAL EN

BILBAO, calle Buenos Aires.

Talleres mecánicos para la preparación y elaboración de toda clase de maderas.

Entarimados, tablas, tablones de todas dimensiones en pino rojo, blanco y mélix.

Cubre-ángulos, zócalos, montantes, jambas y cajetines, pasamanos, cornisas, frisos.

MADRID

Oficinas y Almacén: RONDA DE VALENCIA, núm. 3, principal.

TELÉFONO 498

Depósito: ESTACIÓN DEL PASEO IMPERIAL

TELÉFONO 581

SOCIEDAD ANÓNIMA

CARBONES DE LA NUEVA

Capital: 5.000.000 de pesetas.

MINAS DEL VALLE DEL SAMUÑO

ASTURIAS

GRUPOS DE FERNANDINA

LA NUEVA ∞ MIGUELINA

CARBONES PREMIADOS EN LA EXPOSICIÓN DE ZARAGOZA

CARBONES DE VAPOR

MENUDOS PARA FRAGUA

Pídanse los análisis y la nota mensual de precios.

REPRESENTACIÓN:

José de Gorostizaga, Ingeniero de Minas

Juan de Mena, 23.—MADRID

INGENIERÍA

REVISTA INDUSTRIAL

FUNDADA EL AÑO 1905

Premiada con Medalla de Plata
en la Exposición de Industrias Madrileñas de 1907.

Se publica los días 10, 20 y 30 de cada mes.

SUSCRIPCIÓN PARA ESPAÑA

15 pesetas año. — 4 pesetas trimestre.

Número suelto: 50 céntimos.

Extranjero: año, 30 francos.

PÍDANSE TARIFAS DE ANUNCIOS

REDACCIÓN Y ADMINISTRACIÓN

Juan de Mena, 23. MADRID

SOCIEDAD ANÓNIMA AURRERA

BILBAO

FUNDADA EN EL AÑO 1885

Fábrica especial de tubos de hierro colado para conducción de aguas, vapor y gas.

Tubos de enchufe y cordón, de bridas y sistema **Lavril.**

Tubos para bajadas de aguas.

Llaves, fuentes de vecindad y toda clase de piezas especiales.

Depósitos de agua para inodoros.

Dirección telegráfica:

AURRERA-BILBAO

NOTA. Se remiten catálogos gratis.

SOCIÉTÉ ANONYME DES ÉTABLISSEMENTS

PH. BONVILLAIN & E. RONCERAY

Capital: 1.200.000 francos.

9 & 11, rue des Envierges.—PARIS

J. M. ESPAÑA, INGENIERO DIRECTOR

MÁQUINAS DE MOLDEAR

Las mejores,

las más económicas

y prácticas

de

todos los sistemas.

MÁQUINAS

HERRAMIENTAS

de

todas clases.

TALLERES DE DEMOSTRACIONES:

MADRID: MUNAR Y GUITART, 9, Marqués de Valdeiglesias.

PARIS: 9 & 11, Rue des Envierges.

LEEDS: Albion Works.

DUSSELDORF: Rath.

TORINO: 22, Vía Sacchi.

Idine

color duradero para pinturas exteriores é interiores, especialmente en edificios recién construídos.

Más **económico** y más **higiénico** que las pinturas al óleo.

Inodoro, refractario al fuego.

No contiene substancias venenosas; no se borra.

Pídanse prospectos y muestras á la Casa

R. Avenarius & Co., Hamburgo 8, Fruchthof 45/46.

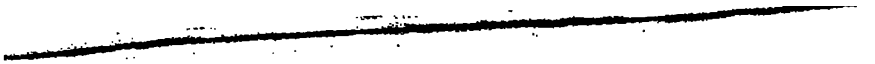
La renombrada marca original

Avenarius Carbolineum

en uso desde hace mas de 30 años, es un preparado antiséptico eficacísimo

para la conservación de la madera

á la cual preserva de la podredumbre y de los insectos xilófagos.

R. Avenarius & Co., Hamburgo 8 - Stuttgart - Berlin - Colonia.

Depósitos en España.